天体測定学 II 2008-4

1　輝線観測の基礎

1.1　特殊相対論的なドップラー効果

天体が観測者に対して速度 v（遠ざかる方向を正とする）で等速直線運動しているとしたときに、特殊相対論的なドップラー効果による周波数変化は次の式で書ける。

$$\nu = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + (v/c)\cos\theta}\,\nu_0. \tag{1}$$

ここで、ν_0 は静止系で観測される周波数であり、ν は観測される周波数である。式 (1) のうち、分母は天体の視線方向の運動によって波長が引き伸ばされる効果を表す。

仮に天体が観測者に対して静止していた時に、天体から観測者へ伝播する波長 λ の電磁波を考える。天体と観測者間の距離 d としたときに、時間間隔 $t = d/c$ の間に $n = d/\lambda$ 個の波が放出される。一方、天体が観測者に対して速度 v で運動している場合、天体と観測者間の距離は時間間隔 t の後には

$$d' = d + (v\cos\theta)t \tag{2}$$

に広がり、また、波の数 n が不変であることから、

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{d + (v\cos\theta)t}{d} = 1 + \frac{v}{c}\cos\theta, \tag{3}$$

これを $c = \lambda\nu$ を用いて周波数に関する式に書き直すと、

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{1 + (v/c)\cos\theta}. \tag{4}$$

また、ドップラー効果の式 (1) の分子は特殊相対論的な時間の遅れの効果を表す。すなわち、観測者から見ると、運動している天体の時計の進み方は $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 倍になり、周波数もこれに比例して小さくなる。すなわち、

$$\frac{\nu''}{\nu} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{5}$$

この効果は天体の運動速度の大きさのみによるので、天体が視線に直交する方向に運動している場合（$\theta = \pi/2$）でも周波数が変化する（横ドップラー効果)。これら 2 つの効果により、最終的に特殊相対論的なドップラー効果は式 (1) で書ける。

もし、天体が視線方向にのみ運動しているとすると ($\theta = 0$)、式 (1) は、

$$\nu = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c}\,\nu_0 = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}\,\nu_0, \tag{6}$$

となる。あるいは、波長についての式は、

$$\lambda = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}\,\lambda_0, \tag{7}$$

1.2　速度が小さいときの近似式

$v/c << 1$ の時の近似式を考える。式 (6) の両辺を 2 乗して

$$(1+\frac{v}{c})\nu^2 = (1-\frac{v}{c})\nu_0^2$$

これを v/c について解くと、

$$\frac{v}{c} = \frac{\nu_0^2 - \nu^2}{\nu_0^2 + \nu^2}$$

ここで、ドップラーシフトによる周波数変化量 $\Delta\nu$ を

$$\Delta\nu \equiv \nu - \nu_0, \tag{8}$$

で導入すると、

$$\begin{aligned}
\frac{v}{c} &= \frac{\nu_0^2 - (\nu_0+\Delta\nu)^2}{\nu_0^2 + (\nu_0+\Delta\nu)^2} \\
&= \frac{-2\Delta\nu\nu_0 - \Delta\nu^2}{2\nu_0^2 + 2\Delta\nu\nu_0 + \Delta\nu^2} \\
&= \frac{-\Delta\nu/\nu_0 - \Delta\nu^2/2\nu_0^2}{1 + \Delta\nu/\nu_0 + \Delta\nu^2/2\nu_0^2} \\
&\approx \left(-\frac{\Delta\nu}{\nu_0} - \frac{\Delta\nu^2}{2\nu_0^2}\right)\left(1 - \frac{\Delta\nu}{\nu_0}\right)
\end{aligned}$$

より最終的に、

$$\frac{v}{c} \approx -\frac{\Delta\nu}{\nu_0} + \frac{\Delta\nu^2}{2\nu_0^2}, \tag{9}$$

を得る。

1.3　視線速度の電波天文的な定義、光学天文的な定義

さらに、一次の近似で十分な場合、式 (9) はより簡略化できて

$$\frac{v}{c} = -\frac{\Delta\nu}{\nu_0}, \tag{10}$$

である。通常、電波天文学における視線速度 v_{rad} は、式 (10) を使って定義される。

一方、波長と視線速度の関係式 (7) を用いて、上と動揺に v/c について求めると、

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} - \frac{\Delta\lambda^2}{2\lambda_0^2}, \tag{11}$$

となり、一次近似では、

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}, \tag{12}$$

となる。光学天文学での視線速度はこの式を用いて定義されることが多い。

注意すべきこととして、式 (10) と式 (12) を用いて定義される視線速度は一次近似であるので、2 次以上の項を考慮すると一致しない。このような混乱を避けるには（特に宇宙論的な遠方天体を観測する際の波長や周波数を求める場合)、以下で定義される赤方偏位 z を使うのが良い。

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = (1+z) \tag{13}$$

1.4 熱運動による線幅

温度 T の熱平衡状態にあるガス中の粒子のエネルギー分布は以下で与えられる。

$$f(E) \propto \exp(-E/kT), \tag{14}$$

簡単のために粒子のエネルギーとして粒子の内部エネルギーは考えず運動エネルギーのみを考えるとする。個々の粒子の運動エネルギー E は、

$$E = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2), \tag{15}$$

と書け、ここで m は粒子の質量、v_x, v_y, v_z は 3 次元の運動速度成分を表す。よって、分布関数 $f(E)$ は

$$f(E) \propto \exp\left(-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\right) \tag{16}$$

となる。一方、ガウス分布の式

$$f_{\rm gauss}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\Big[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\Big], \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_{\rm gauss}(x)\,dx = 1 \tag{17}$$

を用いて分布関数を規格化すると、

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\Big[-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\Big], \tag{18}$$

この分布はマクスウェル分布と呼ばれる。

電波望遠鏡で輝線を観測すると、熱運動によるドップラー効果により視線方向の運動速度が広がって観測される。このときの輝線の形状は、マウスウェル分布の x, y 方向を積分して（視線を z 方向に取る)、

$$\phi(v_z) = \iint f\,dv_x dv_y = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right), \tag{19}$$

というガウス分布でかける。このような輝線の形状を現す関数を、line profile function と呼ぶ。

あるいは、観測される周波数スペクトル上での拡がりは

$$\frac{v_z}{c} = -\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0}, \tag{20}$$

より、規格化した $\phi(\nu)$ は、

$$\phi(\nu) = \left(\frac{mc^2}{2\pi kT\nu_0^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mc^2(\nu-\nu_0)^2}{2kT\nu_0^2}\right) \tag{21}$$

ここで、

$$\int \phi(\nu)\, d\nu = 1, \tag{22}$$

である。

1.4.1 半値幅

ガウス分布などにおいて、最大値の半値を与える分布幅を半値幅（FWHM: Full Width at Half Maximum）という。例えばガウス分布 f_{gauss} の場合、

$$f_{\mathrm{gauss}}(\mathrm{FWHM}/2) = 1/2 \tag{23}$$

より、

$$\mathrm{FWHM} = 2\sqrt{2\ln 2}\sigma \approx 2.35\sigma \tag{24}$$

と書ける。半値幅はスペクトルの線幅を表すのに最も良く使われる。

1.4.2 線幅の例

熱運動する気体粒子についてマクスウェル分布の分散 σ は、以下で与えられる。

$$\sigma = \sqrt{\frac{kT}{m}} \tag{25}$$

以下にいくつかの例について、観測される線幅がどれくらいになるかを示す。

- T = 10 K の水素分子ガス： $\sigma = 0.21$ km/s, FWHM = 0.48 km/s
- T = 100 K の中性水素ガス： $\sigma = 0.91$ km/s, FWHM = 2.14 km/s
- T = 10^4 K の電離ガス： $\sigma = 9.1$ km/s, FWHM = 21.4 km/s

すなわち、熱運動による線幅は、典型的な星間空間では 1～ 数 10 km/s のオーダーである。なお、実際にはガス雲における内部構造の運動などで、完全なガウス分布からははずれた線幅が観測されることも多々ある。

2 アインシュタイン係数

準位 1,2($E_2 > E_1$ とする) の 2 準位からなる単純な原子モデルを考える。このとき 1,2 間でおこる放射には次の 3 種類がある。

- 吸収：状態 1 の原子／分子が光子を吸収して状態 2 へ遷移
- 自発的放射：状態 2 → 1 へ自然に遷移
- 誘導放射：外部から来た光子に誘発されて 2 → 1 へ遷移

輝度 I_ν の放射が、この 2 準位からなる物質に照射されたとき、上記の 3 種類の遷移が単位時間、単位体積あたりに起こる確率 R_1、R_2、R_3 はそれぞれ

$$R_1 \equiv B_{12} I_\nu n_1 \tag{26}$$

$$R_2 \equiv A_{21} n_2 \tag{27}$$

$$R_3 \equiv B_{21} I_\nu n_2 \tag{28}$$

と表すことができる。ここで、n_1, n_2 はそれぞれの状態にある粒子密度である。また、A_{21}, B_{12}, B_{21} はアインシュタイン係数と呼ばれ、それぞれの遷移確率を表す係数である。上の式から、各遷移確率はアインシュタイン係数およびその状態にある粒子密度 n_1, n_2 に比例することがわかる。