

天体測定学 II 2008-3

1 黒体輻射

1.1 黒体輻射の輝度

黒体の定義は「すべての周波数の放射を吸収・放射する、温度 T の理想的な物体」であり、すべての周波数にわたって $\tau_\nu = \infty$ である。黒体の表面から放射される輝度 $B_\nu(T)$ は、プランクの放射公式より温度 T のみの関数になり、以下で書ける。

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (1)$$

単位時間、単位面積、単位立体角、単位周波数あたり放射されるエネルギー dE は

$$dE = B_\nu dS d\Omega d\nu dt \quad (2)$$

MKSA 単位系では、輝度 B_ν の単位は $\text{W} / \text{m}^2 \text{ Hz str}$ である。黒体輻射の具体的な例に、電熱線からの放射、高温の溶鉱炉からもれる光、太陽の光球、宇宙背景放射など、日常生活から宇宙まで多様な例がある（黒体輻射の研究は溶鉱炉の温度を放射から決定するために始まった）。

B_ν に現れる定数について、以下にまとめる。

- プランク定数 $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J s}$
- ボルツマン定数 $k = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J / K}$
- 光速 $c = 299792458 \text{ m / s}$ （真空中、定義値）

いずれも物理学の様々な場面に現れる重要な定数である。

1.2 輝度とプランクの放射公式

黒体輻射を議論する際に量子力学の教科書などで必ず登場するのがプランクの放射公式である。最も良く使われるプランクの放射公式は、黒体炉内で単位体積、単位周波数あたりの輻射強度 u_ν を表し、

$$u_\lambda = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}, \quad (3)$$

であろう。単位体積内に含まれる光子の運動方向は完全にランダムであるので、特定の単位立体角 $d\Omega$ 内に進む光子は全体の $1/4\pi$ であり、その速度は光速 c であることから、 B_ν は u_ν を用いて、

$$B_\nu = \frac{c}{4\pi} u_\nu, \quad (4)$$

と書ける。

1.3 2つの近似式

黒体の輝度 B_ν の近似式として以下の2つの重要な近似がある。

1) レーリー・ジーンズ近似 ($h\nu \ll kT$ 、低周波領域)

$$B_\nu(T) = \frac{2kT}{c^2} \nu^2 \propto \nu^2 \quad (5)$$

2) ウィーン近似 ($h\nu \gg kT$ 、高周波領域)

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT)} \propto \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/kT)}. \quad (6)$$

1.4 輻射の極大値

黒体輻射輝度が極大となる周波数 ν の値は、 $\partial B_\nu / \partial \nu = 0$ より求めることができる。ここで、 $x \equiv h\nu/kT$ とすると

$$B(x) = C \frac{x^3}{e^x - 1}, \quad (7)$$

となり、周波数 ν で微分すると、

$$\frac{\partial B_\nu(x)}{\partial x} = C \left[\frac{3x^2}{e^x - 1} - \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} \right] = \frac{Cx^2}{(e^x - 1)^2} [3(e^x - 1) - xe^x],$$

を得る。 $\partial B_\nu / \partial x = 0$ となるためには、

$$3(e^x - 1) - xe^x = 0$$

であればよいから、最終的に

$$x = 3(1 - e^{-x}) \quad (8)$$

数値計算によれば上式は $x \approx 2.82$ で満たされるので、最終的に B_ν の極大値は

$$\nu_{\max} = 2.82 \frac{kT}{h}, \quad (9)$$

となる。

具体的な数値を代入すると、

$$\nu_{\max} = 59 \times \left(\frac{T}{\text{K}} \right) \text{ GHz}. \quad (10)$$

例えば、宇宙背景放射 (2.7 K) の場合、 $\nu \approx 160$ GHz となり、ミリ波帯でピークとなる。

上記の関係式はウィーンの変位則の周波数版である。元々の変位則は

$$\lambda_{\max} = 2.9 \times 10^{-3} \left(\frac{\text{K}}{T} \right) \text{ m}, \quad (11)$$

であり、この関係式は B_λ を λ で微分することで得ることができる。

1.5 黒体からの電波放射

電波帯で見た黒体放射は、ほぼすべての場合についてレーリー・ジーンズ近似が成立する。レーリー・ジーンズ領域では黒体の輝度は周波数の2乗 ν^2 に比例するので、どのような温度の天体もそれなりの強度の電波を出す (c.f. ウィーン領域では周波数とともに指数関数的に強度が落ちる)。それゆえ、電波では宇宙背景放射から高温プラズマまで様々な温度の天体を観測することができるのである。光や X 線などの波長の短い電磁波では、逆に、ある一定以上の温度をもった天体のみが選択的に見えている。

2 黒体の例：太陽と地球

2.1 シュテファン・ボルツマンの法則

黒体の単位面積、単位時間あたりの放射エネルギー l は以下のように与えられる。

$$l = \int \int B_\nu \cos \theta d\Omega d\nu. \quad (12)$$

立体角に関する積分は

$$\int \cos \theta d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = \pi \quad (13)$$

であるから、

$$l = \pi \int B_\nu d\nu, \quad (14)$$

と書ける。一方、黒体の輝度 B_ν は、

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}, \quad (15)$$

であり、

$$x \equiv \frac{h\nu}{kT}, \quad (16)$$

を用いると、

$$\begin{aligned} \int B_\nu d\nu &= \int \frac{2hx^3}{c^2} \left(\frac{kT}{h}\right)^3 \frac{1}{e^x - 1} \frac{kT}{h} dx, \\ &= \frac{2k^4T^4}{c^2h^3} \int \frac{x^3}{e^x - 1} dx, \end{aligned}$$

となり、さらに

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

を用いると、結果的に

$$\int B_\nu d\nu = \frac{2\pi^4k^4T^4}{15c^2h^3}, \quad (17)$$

となる。よって黒体の単位面積あたりの放射エネルギー l は、

$$l = \pi \int B_\nu d\nu = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4 \equiv \sigma T^4, \quad (18)$$

ここで σ はシュテファン・ボルツマン定数

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4 \quad (19)$$

である。すなわち、黒体からの全放射エネルギーは温度 T の 4 乗に比例することがわかる。この関係式をシュテファン・ボルツマンの法則という。

2.2 例 1 : 太陽の放射エネルギー

太陽の光度 L_\odot (単位時間あたりのエネルギー放射量) はシュテファン・ボルツマンの法則から簡単に見積もることができる。

$$L_\odot = 4\pi R_\odot^2 l = 4\pi R_\odot^2 \sigma T^4, \quad (20)$$

ここで太陽半径 R_\odot は 70 万 km = 7×10^8 m、表面温度 T は約 5800 K であるから、これらの値を代入すると

$$L_\odot \sim 3.9 \times 10^{26} \text{ W}$$

を得る。日本の最新鋭の原子力発電所の最大出力が 100 万 kW = 10^9 W であるから、太陽エネルギーが桁違いに大きいことがわかる。

2.3 例 2 : 地球の温度

地球が太陽から単位時間あたり受け取るエネルギー量 $P_{\oplus, \text{rec}}$ は、半径 1AU の球面を通過する太陽の全放射エネルギーのうち、地球の断面積分のみが地球に吸収されるとして求められる。すなわち、

$$P_{\oplus, \text{rec}} = L_\odot \frac{\pi r_\oplus^2}{4\pi a^2} \times (1 - A), \quad (21)$$

ここで A は地球の反射率 (アルベドと呼ばれる) を表し、最後の $(1 - A)$ の項は反射されずに地球表面に吸収されるエネルギーの割合を表している。人工衛星からみた地球が明るく輝いているのは A が 0 でなく、太陽光を反射しているからである ($A \sim 0.3$ 程度である)。この式に太陽光度の式を代入して整理すると、

$$P_{\oplus, \text{rec}} = \left(\frac{r_\odot^2}{a^2} \right) \sigma T_\odot^4 \times \pi r_\oplus^2 \times (1 - A) \quad (22)$$

一方、地球表面の温度を T_\oplus としするとき、地球表面から放射される単位時間あたりのエネルギー $P_{\oplus, \text{rad}}$ は

$$P_{\oplus, \text{rad}} = 4\pi r_\oplus^2 \sigma T_\oplus^4. \quad (23)$$

受け取るエネルギーと放射するエネルギーがつりあっているとすると ($P_{\oplus,\text{rec}} = P_{\oplus,\text{rad}}$) と、

$$\frac{P_{\oplus,\text{rec}}}{P_{\oplus,\text{rad}}} = \frac{(r_{\odot}^2/a^2)\sigma T_{\odot}^4 \times \pi r_{\oplus}^2 \times (1-A)}{4\pi r_{\oplus}^2 \sigma T_{\oplus}^4} = 1, \quad (24)$$

これを整理すると、

$$\frac{r_{\odot}^2 T_{\odot}^4 (1-A)}{4a^2 T_{\oplus}^4} = 1,$$

より

$$T_{\oplus} = (1-A)^{1/4} \sqrt{\frac{r_{\odot}}{2a}} T_{\odot}, \quad (25)$$

となり、地球の表面温度は、太陽温度 T_{\odot} 、太陽半径 r_{\odot} 、太陽地球距離 a 、および反射率 A で決まることがわかる (地球の半径 r_{\oplus} にはよらない)。この式に具体的な値を代入すると、

$A = 0$ の場合、 $T_{\oplus} = 279$ K (摂氏 6 度)

$A = 0.3$ の場合、 $T_{\oplus} = 255$ K (摂氏 -18 度)

となり、地球の表面温度にほぼ対応していることがわかる。

3 輝度温度と輻射輸送の式

3.1 輝度温度

黒体輻射の式 B_{ν} は、黒体の輝度を表す式である。レーリー・ジーンズ近似

$$B_{\nu}(T) = \frac{2k\nu^2}{c^2} T \propto T, \quad (26)$$

より、黒体の輝度は黒体温度 T に比例する。この関係を用いて、一般の天体の輝度 I_{ν} が (実際に黒体かどうかに関わらず) 「何度の黒体に相当するか」として表したものが輝度温度 (Brightness temperature) である。すなわち輝度温度 T_b は以下で定義される。

$$I_{\nu} = \frac{2k\nu^2}{c^2} T_b, \quad (27)$$

あるいは

$$T_b = \frac{c^2}{2k\nu^2} I_{\nu}, \quad (28)$$

輝度温度は電波観測において大変重要な観測量である。輝度温度は、熱的放射の場合天体の温度を反映し、特に天体が黒体放射をしている場合には、輝度温度 T_b は天体の温度 T に一致する。

3.2 キルヒホッフの法則

すでにのべたように、一様な媒質（源泉関数が一定）の場合、輻射輸送方程式の解は、以下で得られる。

$$I_\nu = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}). \quad (29)$$

$\tau_\nu = \infty$ の極限では、 I_ν は黒体輻射 B_ν にならなければいけないので、熱平衡状態にある源泉関数 S_ν もまた黒体輻射 B_ν に等しい。源泉関数の定義は

$$S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{k_\nu}, \quad (30)$$

であるから、最終的に

$$\frac{j_\nu}{k_\nu} = B_\nu, \quad (31)$$

である。これをキルヒホッフの法則という。キルヒホッフの法則は物質の放射係数と吸収係数を結びつける重要な関係式である。

3.3 輝度温度を用いた輻射輸送の式

局所熱平衡状態にある物質中を伝播した際に輻射輸送方程式は

$$I_\nu = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + B_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}), \quad (32)$$

である。これを輝度温度と B_ν のレーリー・ジーンズ近似を用いると、

$$T_b = T_b(0)e^{-\tau_\nu} + T(1 - e^{-\tau_\nu}), \quad (33)$$

という形でかけ、輝度温度に関する式が得られる。ここで T は熱平衡状態にある物質の温度である。