

天体測定学II（電波天文学）

国立天文台 水沢 VERA 観測所 本間 希樹

このノートは、2007年度天体測定学II（東北大学）のノートを主にまとめたものであるが、加筆すべき項目が多々あり、未完成のものであることに留意せよ。

1 電波天文学入門

1.1 なぜ電磁波観測か？

天体を観測する（＝天体からの情報を受け取る）ためには、天体から放出された何らかの粒子を検出する必要がある。ここで「粒子」とは、自然界に存在する4つの力を媒介する粒子から、陽子や電子、ニュートリノ、さらには隕石まで、様々な種別がある。それらの種別を以下の表にまとめる。天体観測に際して特に重要なのは、1）十分遠方から到達する、2）天文学的距離を伝播する際に直進する、3）観測可能な十分な強度がある、という点である。

表 1: 天体からの情報をもたらす可能性のある様々な粒子

粒子の種別	粒子名	到達距離	直進性
場の媒介粒子			
電磁気力	光子 (photon)	無限	
重力	重力子 (graviton)	無限	
強い力	グルーオン	有限	
弱い力	ウィークボゾン	有限	()
バリオン	陽子	無限	× (荷電粒子)
	隕石	太陽系内	× (重力の影響大)
レプトン	電子	無限	× (荷電粒子)
	ニュートリノ	無限	

上記の様々な「粒子」のうち、無限距離に到達しうるのは遠距離力である電磁気力および重力の媒介粒子と、安定な（寿命の長い）粒子である。しかし、荷電粒子は磁場によって進行方向が曲げられ、結果としてどの天体からやってきたのかが判らなくなり、また、隕石のような多粒子からなる物質は到達距離が極めて小さい。よって、1）無限の到達距離と2）直進性を持った併せ持つ粒子は、光子、重力子、ニュートリノに限られることがわかる。

3）の観測可能な強度については、技術の進歩に大いに依存するので、この3つの粒子はどれも天体観測の有効な手段となりうる。しかし、重力子（重

力波)は現在のところ未検出である。また、ニュートリノが検出されている天体は、太陽、地球、そして超新星 1987A の 3 天体のみである。従って、現在のところ、光子 (電磁波) の観測が一般的な天文観測としては唯一のものである。一方、重力波やニュートリノで観測される天体が増加すれば、天体に関する新たな知見をもたらすことが期待され、現在も活発な研究が続けられている。

1.2 電磁気力と重力

電磁波と重力波では観測の難易度が格段に異なる。これは、クーロン力と重力の大きさを比較すれば容易に理解できる。実際、電荷 e 、重さ m_e の 2 個の電子が相互作用する状況を考えると、クーロン力 F_{em} は、

$$F_{em} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}, \quad (1)$$

一方、重力 F_{gr} は

$$F_{gr} = \frac{Gm_e^2}{r^2}, \quad (2)$$

と書き表される。ここで、 r は 2 粒子間の距離であり、 ϵ_0 は真空の誘電率、 G は重力定数である。両者の比を取ると、

$$\frac{F_{em}}{F_{gr}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 G m_e^2} \sim 4 \times 10^{42}, \quad (3)$$

であり、圧倒的に電磁気力が大きいことがわかる。電磁波も重力波も粒子が加速を受けるときに放出されるので、電磁波が重力波よりもはるかに放出されやすく、従って観測が容易である。

2 電磁波と電波

2.1 電磁波の基礎的性質

量子力学的な考えによれば、電磁波は粒子 (光子) であると同時に波であり、両者の性質を併せ持っている。電磁波の基礎的な性質を以下にまとめる。

- 真空中の光速 c : $c=299792458 \text{ m s}^{-1}$ (これは長さの定義数、時間間隔の 1 秒は別に定義される)
- 電磁波の波長と周波数の関係 : $c = \nu\lambda$
- 光子のエネルギー E : $E = h\nu = hc/\lambda$
- 電磁波は横波であり、直交 2 偏波成分が存在する。

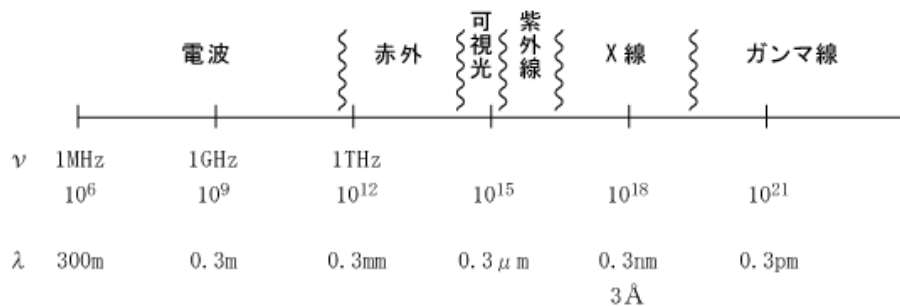


図 1: 電磁波の分類

表 2: 電磁波の分類

波長 λ	周波数	名称
$\infty - \sim 0.3 \text{ mm}$	$0 \text{ Hz} - 10^{12} \text{ Hz} (1 \text{ THz})$	電波
$\sim 0.3 \text{ mm} - \sim 0.8 \mu\text{m}$	$10^{12} \text{ Hz} - 3 \times 10^{14} \text{ Hz}$	赤外線
$\sim 0.8 \mu\text{m} - \sim 0.3 \mu\text{m}$	$3 \times 10^{14} \text{ Hz} - 10^{15} \text{ Hz}$	可視光
$\sim 0.3 \mu\text{m} - \sim 10 \text{ nm}$	$10^{15} \text{ Hz} - 3 \times 10^{16} \text{ Hz}$	紫外線
$\sim 10 \text{ nm} - \sim 1 \text{ pm}$	$3 \times 10^{16} \text{ Hz} - 3 \times 10^{20} \text{ Hz}$	X線
$\sim 1 \text{ pm} -$	$3 \times 10^{20} \text{ Hz} -$	線

2.2 電波

電磁波は周波数（波長）により電波、赤外線、可視光、紫外線、X線、線などに分類される。電波は波長が最も長く（周波数が最も低く）、ガンマ線は波長が最も短い（周波数が最も高い）。通常、電磁波における「電波」帯は、以下の波長や周波数で定義されるが、赤外線との区別は明確には定義されていない。

$$\text{周波数 } \nu \leq 1\text{THz}(= 10^{12}\text{Hz})$$

$$\text{波長 } \lambda \geq 0.3\text{mm}$$

波長や周波数と別の観点としては、観測方式の違いがあげられる。一般的に言って、電波は波として受信され、赤外線は粒子（光子）として受信されることが多い。しかし、電波を光子として受信するボロメータや、赤外線や可視光を波として扱う光赤外線干渉計も存在しており、観測方式による区分も、かならずしも厳密なものではない。ちなみに、現行の電波法では、電波の周波数上限は3 THzになっている。

また、電波は波長や周波数によって、以下のようにさらに細分化した名称で呼ばれることも多い。

表 3: 電波の波長や周波数による分類

波長	周波数	名称	用途 (天文学以外)
1 - 10 km	30 kHz - 300 kHz	キロメートル波 (長波)	電波時計、船舶無線
100 m - 1 km	300 kHz - 3 MHz	中波	ラジオ、無線通信
10 m - 100 km	3 MHz - 30 MHz	短波	短波放送、無線通信
1 - 10 m	30 - 300 MHz	メートル波 (VHF)	FM ラジオ、テレビ
10 cm - 1 m	300 MHz - 3 GHz	デシメートル波 (UHF)	テレビ、携帯
1 cm - 10 cm	3 GHz - 30 GHz	センチ波	衛星通信
1 mm - 10 mm	30 GHz - 300 GHz	ミリ波	レーダー
0.1 mm - 1 mm	300 GHz - 3 THz	サブミリ波	

2.3 電波観測の特徴

様々な波長の電磁波の中で電波帯域で観測を行うことの利点として、次の2つがあげられる。

- 観測できる天体の種類が圧倒的に多い
- 波として受信するので、干渉計が構成可能であり、最も高い分解能の装置が達成される。

一点目に関しては、電波帯では3 K背景放射が観測可能であり、これより温度の高いありとあらゆる天体が (原理的には) すべて電波観測可能である。他方、可視光では恒星に相当するような温度 (数千度) 以下の熱放射は見えず、また、X線領域になると放射に必要な温度はさらに上昇する。

2点目に関しては、光子を波として可干渉性を保ったまま扱うことがポイントである。これにより、干渉計が実現でき、すべての波長帯の観測装置の中で最も高い分解能を達成することができる (光赤外線でも近年技術が進歩し、干渉計が観測で使われている例もあるが、現在のところイメージング能力は電波に比べて大きく劣っている)。

2.4 望遠鏡の分解能

望遠鏡の分解能 (回折限界ともいわれる) は以下の式で与えられる。

$$\theta \approx \frac{\lambda}{D} \quad (4)$$

ここで、 λ は観測する電磁波の波長、 D は望遠鏡の口径である。高い分解能を達成するには、より波長の短い電磁波を観測するか、より大きな望遠鏡を使えばよい。電波の場合波長 λ は他の電磁波に比べて長い。電波干渉計の技術により D を非常に (具体的には地球サイズかそれ以上に) 大きくできる。これによって、ありとあらゆる望遠鏡の中で最も高い空間分解能が達成される。

表 4: いろいろな望遠鏡の分解能の例

装置	D	λ	θ
人間の目 (瞳孔)	5 mm	$0.5 \mu\text{m}$	0.34 arcmin
すばる	8.2 m	$2 \mu\text{m}$	50 mas
100m 電波望遠鏡	100 m	1 cm	0.34 arcmin
VSOP-2	300000 km	7 mm	$48 \mu\text{as}$

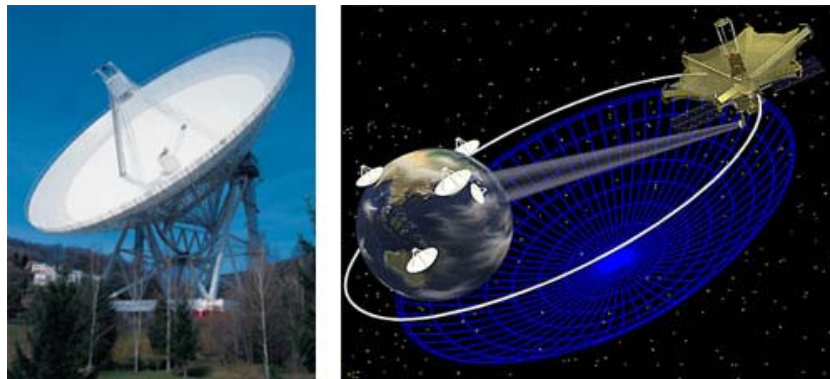


図 2: 電波望遠鏡の例。ドイツ Effelsberg 100m 鏡 (左)、VSOP (右)

2.5 大気の窓

我々は地球表面上で生活しており、いわば大気という「海」の底から宇宙を観測している。大気中の原子や分子によって電磁波が吸収されるため、波長によっては地上からは観測できない電磁波が存在する。大気の透過率を波長 (周波数) の観測として表したとき、透過率が高いのは電波帯域と可視光帯域のみであり、これらの透過率が高い領域を「大気の窓」という。一方、赤外線やX線、 γ 線の観測は地上からは行えないので、衛星を打ち上げて大気圏外から観測する必要がある。

電波帯の大気の窓は、地表近くでは約 100 MHz から数 100GHz 程度である。電波帯の大気の窓は低周波側は電離層 (地表から 50 ~ 500 km の電離した高層大気) による反射によって制限されている。また高周波側は主に水蒸気による吸収によって制限されており、地上 4000m ~ 5000m 級の高地では気象条件が良ければ 1THz 程度まで電波観測が可能である。このような例として、サブミリ波を観測する装置である、SMA (米国ハワイ マウナケア山、標高 4000m)、ALMA (チリ アタカマ高地、標高 5200m) などがあげられる。

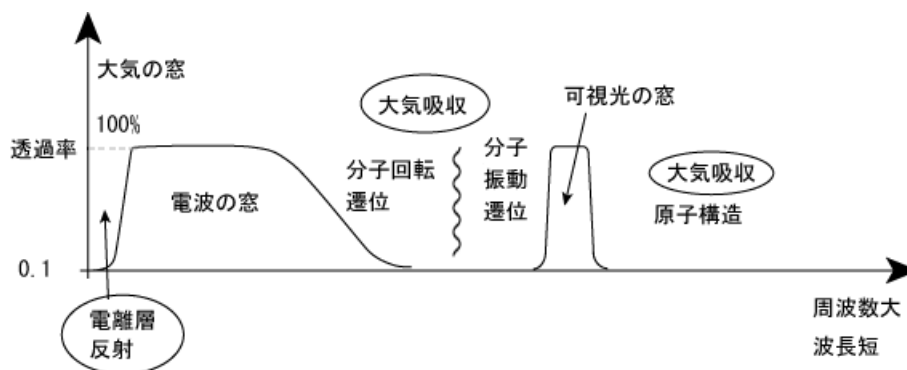


図 3: 大気之窗

3 熱的放射と非熱的放射

ある放射源内のすべて粒子について、エネルギー準位 E の分布が以下のようにボルツマン分布で与えられるとき、この放射源は温度 T の熱平衡状態にあるという。

$$N(E) \propto \exp(-E/kT). \quad (5)$$

ここで k はボルツマン定数である。このような放射源（例えばガス雲など）があるとき、その粒子の熱運動に起因して発生する放射を「熱的放射」という。電波天文学で良く観測される熱的放射の例には、以下のようなものがある。

- 黒体放射：光学的厚み τ （後述）が無限大の理想的な放射源。例として、宇宙背景放射、恒星の光球等
- （熱的）輝線放射：原子、分子内の内部状態の遷移に伴う周波数の決まった放射のうち、原子または分子の熱運動により励起されているもの。例として、中性水素ガス 21cm 線、低温度分子雲からの分子線、HII 領域からのパルマー線
- 制動放射：高温 (T 10000 K 以上) の電離領域で、プラズマ内の電子散乱による放射。例として、HII 領域

一方、放射源が熱平衡状態にない場合、あるいは放射の起源が熱運動に伴う過程でない場合の放射は、非熱的放射と呼ばれる。非熱的放射の例には以下のようなものがある。

- シンクロトロン放射：高エネルギー荷電粒子が磁場中を通過するときに発生する放射。例として、超新星残骸、AGN ジェット
- メーザー放射（非熱的な輝線放射）。原子や分子内の内部状態のエネルギー準移分布において「準移反転」（温度が負の状態）が起こり、誘

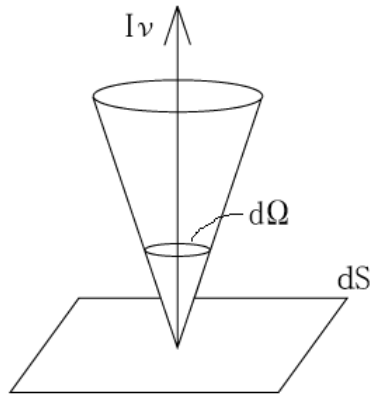


図 4: 輝度の模式図

導放射により増幅された強力な放射。例として、星形成領域での H₂O
メーザー

ちなみに、メーザー (MASER) は Microwave Amplification of Stimulated
Emission of Radiation の略であり、レーザー (LASER) は Light Amplicifi-
cation of ... である。

4 輝度とフラックス

4.1 定義

電波観測における 2 つの重要な観測量として輝度 (brightness, specific in-
tensity) I_ν とフラックス (flux, flux density) F_ν がある。輝度は単位周波
数、単位時間あたりに単位面積、単位立体角を通過するエネルギー量であり、
このエネルギー dE は

$$dE = I_\nu dS d\Omega d\nu dt \quad (6)$$

と表すことができる。

一方、フラックスは単位周波数、単位時間あたりに単位面積を通過するエ
ネルギー量を表す。すなわち、

$$dE' = F_\nu dS d\nu dt = \int I_\nu \cos \theta d\Omega dS d\nu dt, \quad (7)$$

つまり、輝度とフラックスとの間には

$$F_\nu = \int I_\nu \cos \theta d\Omega \quad (8)$$

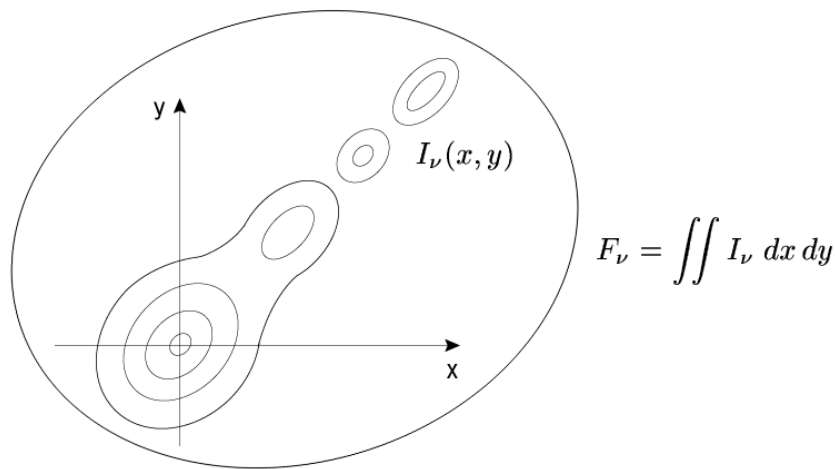


図 5: 輝度とフラックスの関係

の関係がある。ここで θ は考えている面の法線と光線がなす角であり、 $d\Omega$ は立体角要素である。なお、MKSA 単位系では、輝度の単位は $\text{W} / \text{Hz m}^2 \text{ str}$ 、フラックスは $\text{W} / \text{Hz m}^2$ となる。

天体観測においては多くの場合、天体が天球面上で占める立体角は小さく、 $\theta \sim 0$ であるとしてよいから、このとき

$$F_\nu = \int I_\nu d\Omega. \quad (9)$$

すなわち、天球面上での輝度分布を積分したものがフラックスになる。天球面上での 2 次元位置を例えば x, y で表すと、

$$F_\nu = \int I_\nu(x, y) dx dy \quad (10)$$

と書ける。

すなわち、 $I_\nu(x, y)$ は天球面上でのある位置での輝度に、 F_ν はその天体全体からの輝度を積分した量に相当する。光学天文では、輝度は表面輝度と相当し、 $\text{mag} / \text{arcsec}^2$ などの単位で表され、また、フラックスは等級 (mag) に相当する。

4.2 性質

輝度の最も重要な性質は、真空中を伝播に伴い変化しない保存量であるということである。一方、フラックスは距離に依存し、 $F_\nu \propto r^{-2}$ で減少する量である。

例 1) 太陽を地球や金星から観測した場合、無限に小さい立体角を通過するエネルギーは地球や金星で変わらない。何故なら、この立体角が見込む太

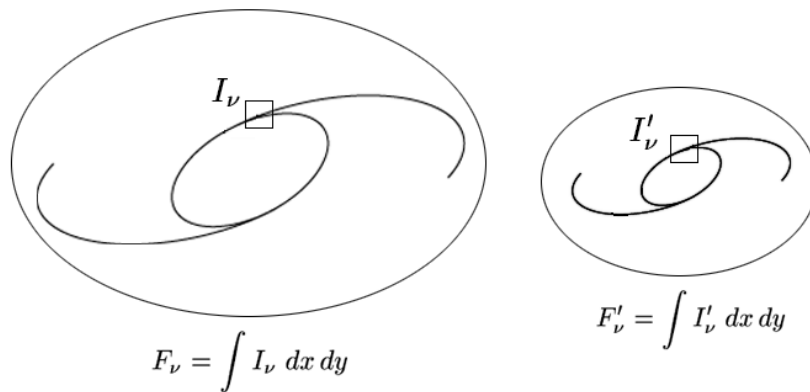


図 6: 明るさが等しく、距離が 2 倍異なる銀河の輝度とフラックス。輝度は同じだが、フラックスは遠い銀河の方が 4 分の 1 になる。

陽の表面積は r^2 に比例し、一方、太陽の単位面積から受け取るフラックスは r^{-2} に比例するので、打ち消しあい、結果として距離によらず輝度は一定になる。なお、黒体輻射の場合、輝度は温度に対応しており、輝度が距離によらず一定であることは太陽の温度が地球から見ても金星からみても同じであることを意味している。

例 2) 同じ銀河を 2 倍の距離に置いたとき、

$$I'_\nu = I_\nu, \quad F'_\nu = F_\nu/4, \quad (11)$$

となる。

なぜなら、輝度は単位立体角内の星の数 N と星の見かけの平均光度 l を用いて $I_\nu = lN$ とかける。一方、2 倍の距離の銀河では、単位立体角内の星の数は $N' = 2^2 N$ 、星の見かけの平均光度は $l' = l/2^2$ となり、輝度は $I'_\nu = l'N' = lN$ となる。しかし、この銀河の天球面上における立体角は $1/2^2$ 倍になるので、フラックス $F'_\nu = F_\nu/4$ となる。

4.3 良く使う単位

よく使う単位として、

- フラックス： Jy (ジャンスキー、 $1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W} / \text{m}^2 \text{ Hz}$)
- 輝度： Jy / beam (望遠鏡のビームあたりのフラックス)、あるいは、K (ケルビン、何度の黒体の輝度に相当するか)

がある。ジャンスキーはもちろん宇宙電波の発見者 Karl Jansky にちなんで命名である。

4.4 例：天体からくる電波のエネルギー

問題：1Jy の天体を直径 100m、開口能率 50%、帯域幅 100MHz のアンテナで観測したときに得られる電力はどれくらいか？

解：

$$10^{-26} \text{ W/m}^2\text{Hz} \times 0.5 \pi (100/2)^2 \text{ m}^2 \times 10^8 \text{ Hz} = 4 \times 10^{-15} \text{ W}$$

これは我々が日常使用する電力に比べて圧倒的に小さい。宇宙電波発電では我々に生活に必要なエネルギーを到底まかなえない。また、天体からの電波を受信するには大望遠鏡と信号を効率よく増幅する低雑音受信機が必須である。

5 輻射輸送方程式

輝度 I_ν が物質中を伝播する際にどのように変化するかを表す基礎方程式が輻射輸送方程式である。

輝度 I_ν 、経路に沿った長さを s とすると、吸収・放射を行う物質がない場合 (e.g. 真空中) すでに見たように輝度は保存量であるから

$$\frac{dI_\nu}{ds} = 0. \quad (12)$$

一方、伝播経路上に物質 (例えばガス雲) が存在すると輝度 I_ν は物質による吸収、放射の影響を受けて変化する。今、

吸収係数を κ_ν (単位例 1 / m)

放射係数を j_ν (単位例 W / m³ Hz str)

としたとき I_ν の変化は

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\kappa I_\nu + j_\nu, \quad (13)$$

とかける。これが輻射輸送の基本方程式である。右辺第 1 項は吸収係数 κ_ν および輝度 I_ν に比例する吸収量であり、第 2 項は放射量を表し、 I_ν にはよらない。

さらに、伝播経路に沿った光学的厚み τ_ν を以下で定義する。

$$\tau_\nu = \int \kappa_\nu ds. \quad (14)$$

$d\tau_\nu = \kappa_\nu ds$ を用いて、

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + \frac{j_\nu}{\kappa_\nu}. \quad (15)$$

さらに

$$S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\kappa_\nu}. \quad (16)$$

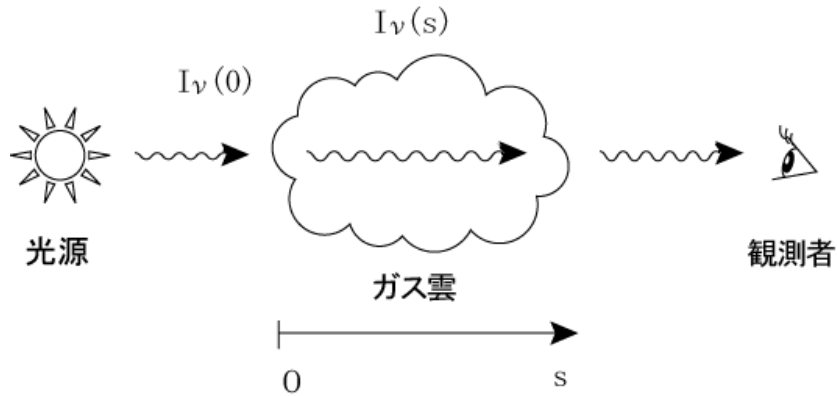


図 7: 光源およびガス雲による輻射輸送

を導入して

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu. \quad (17)$$

と書くことができる。 S_ν を源泉関数という。

S_ν が場所によらず一定とすると、

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{d}{d\tau_\nu}(I_\nu - S_\nu) = -I_\nu + S_\nu, \quad (18)$$

より、微分方程式を積分できて、

$$(I_\nu - S_\nu) = C e^{-\tau_\nu}. \quad (19)$$

初期条件 $I_\nu(\tau_\nu = 0) = I_\nu(0)$ より

$$I_\nu = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}) \quad (20)$$

これが輻送方程式の解である。

この式のいくつかの重要な特徴として以下があげられる。

- $\tau_\nu = 0$ (物質なし): $I_\nu = I_\nu(0)$: 初期情報が保存
- $\tau_\nu \ll 1$ (optically thin): $I_\nu = I_\nu(0) + \tau_\nu S_\nu$
- $\tau_\nu \gg 1$ (optically thick): $I_\nu = S_\nu$

optically thin の場合、 $\tau_\nu S_\nu$ の項から物質 (ガス雲) の情報を得ることができる。一方、optically thick の場合、初期情報 $I_\nu(0)$ は完全に失われ、ガス雲の表面のみの情報が得られる。

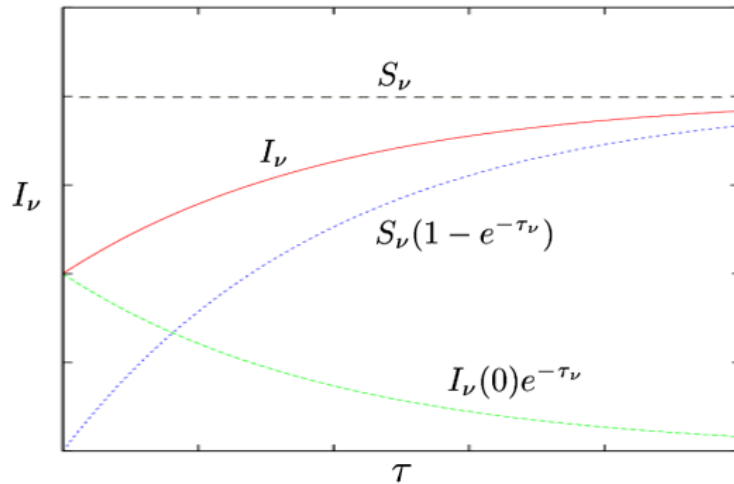


図 8: 輻射輸送方程式の解

6 黒体輻射

6.1 黒体輻射の輝度

黒体の定義は「すべての周波数の放射を吸収、放射する理想的な物体」であり、すべての周波数にわたって $\tau_\nu = \infty$ である。黒体の表面から放射される輝度 $B_\nu(T)$ は、プランクの放射公式より温度 T のみの関数になり、以下で書ける。

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (21)$$

単位時間、単位面積、単位立体角、単位周波数あたり放射されるエネルギー dE は

$$dE = B_\nu dS d\Omega d\nu dt \quad (22)$$

MKSA 単位系では、輝度 B_ν の単位は $\text{W} / \text{m}^2 \text{ Hz str}$ である。黒体輻射の具体的な例に、電熱線からの放射、高温の溶鉱炉からもれる光、太陽の光球、宇宙背景放射など、日常生活から宇宙まで多様な例がある（黒体輻射の研究は溶鉱炉の温度を放射から決定するために始まった）。

B_ν に現れる定数について、以下にまとめる。

- プランク定数 $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J s}$
- ボルツマン定数 $k = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J / K}$
- 光速 $c = 299792458 \text{ m / s}$ （真空中、定義値）

いずれも物理学の様々な場面に現れる重要な定数である。

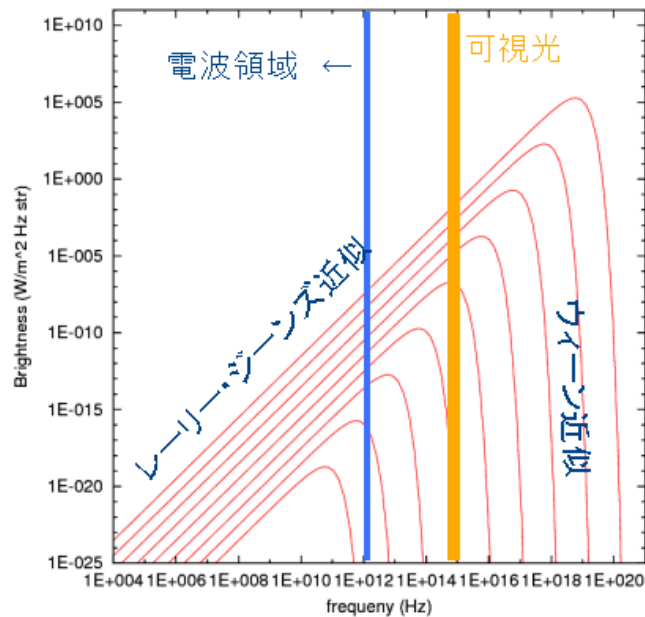


図 9: B_ν のプロット ($1 \sim 10^8$ K)

6.2 輝度とプランクの放射公式

黒体放射を議論する際に量子力学の教科書などで必ず登場するのがプランクの放射公式である。最も良く使われるプランクの放射公式は、黒体炉内で単位体積、単位周波数あたりの輻射強度 u_ν を表し、

$$u_\lambda = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}, \quad (23)$$

であろう。単位体積内に含まれる光子の運動方向は完全にランダムであるので、特定の単位立体角 $d\Omega$ 内に進む光子は全体の $1/4\pi$ であり、その速度は光速 c であることから、 B_ν は u_ν を用いて、

$$B_\nu = \frac{c}{4\pi} u_\nu, \quad (24)$$

と書ける。

6.3 2つの近似式

黒体の輝度 B_ν の近似式として以下の2つの重要な近似がある。

1) レーリー・ジーンズ近似 ($h\nu \ll kT$ 、低周波領域)

$$B_\nu(T) = \frac{2kT}{c^2} \nu^2 \propto \nu^2 \quad (25)$$

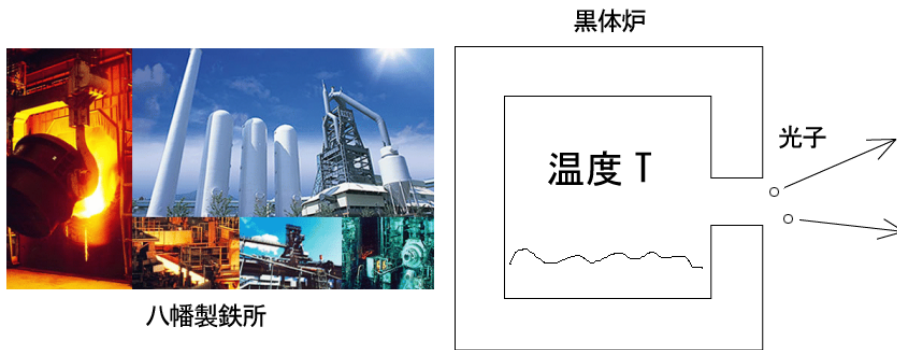


図 10: 黒体の例 (溶鉱炉)

2) ウィーン近似 ($h\nu \gg kT$, 高周波領域)

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT)} \propto \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/kT)}. \quad (26)$$

6.4 輻射の極大値

黒体輻射輝度が極大となる周波数 ν の値は、 $\partial B_\nu / \partial \nu = 0$ より求めることができる。ここで、 $x \equiv h\nu/kT$ とすると

$$B(x) = C \frac{x^3}{e^x - 1}, \quad (27)$$

となり、周波数 ν で微分すると、

$$\frac{\partial B_\nu(x)}{\partial x} = C \left[\frac{3x^2}{e^x - 1} - \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} \right] = \frac{Cx^2}{(e^x - 1)^2} [3(e^x - 1) - xe^x],$$

を得る。 $\partial B_\nu / \partial x = 0$ となるためには、

$$3(e^x - 1) - xe^x = 0$$

であればよいから、最終的に

$$x = 3(1 - e^{-x}) \quad (28)$$

数値計算によれば上式は $x \approx 2.82$ で満たされるので、最終的に B_ν の極大値は

$$\nu_{\max} = 2.82 \frac{kT}{h}, \quad (29)$$

となる。

具体的な数値を代入すると。

$$\nu_{\max} = 59 \times \left(\frac{T}{\text{K}} \right) \text{ GHz}. \quad (30)$$

例えば、宇宙背景放射 (2.7 K) の場合、 $\nu \approx 160$ GHz となり、ミリ波帯でピークとなる。

上記の関係式はヴィーンの変位則の周波数版である。元々の変位則は

$$\lambda_{\max} = 2.9 \times 10^{-3} \left(\frac{\text{K}}{T} \right) \text{ m}, \quad (31)$$

であり、この関係式は B_λ を λ で微分することで得ることができる。

6.5 黒体からの電波放射

電波帯で見た黒体放射は、ほぼすべての場合についてレーリー・ジーンズ近似が成立する。レーリー・ジーンズ領域では黒体の輝度は周波数の 2 乗 ν^2 に比例するので、どのような温度の天体もそれなりの強度の電波を出す (c.f. ウィーン領域では周波数とともに指数関数的に強度が落ちる)。それゆえ、電波では宇宙背景放射から高温プラズマまで様々な温度の天体を観測することができるのである。光や X 線などの波長の短い電磁波では、逆に、ある一定以上の温度をもった天体のみが選択的に見えている。

7 輝度温度

黒体放射の式 B_ν は、黒体の輝度を表す式である。レーリー・ジーンズ近似

$$B_\nu(T) = \frac{2k\nu^2}{c^2} T \propto T, \quad (32)$$

より、黒体の輝度は黒体温度 T に比例する。この関係を用いて、一般の天体の輝度 I_ν が (実際に黒体かどうかに関わらず) 「何度の黒体に相当するか」として表したものが輝度温度 (Brightness temperature) である。すなわち輝度温度 T_b は以下で定義される。

$$I_\nu = \frac{2k\nu^2}{c^2} T_b, \quad (33)$$

あるいは

$$T_b = \frac{c^2}{2k\nu^2} I_\nu, \quad (34)$$

輝度温度は電波観測において大変重要な観測量である。輝度温度は、熱的放射の場合天体の温度を反映し、特に天体が黒体放射をしている場合には、輝度温度 T_b は天体の温度 T に一致する。

8 局所熱平衡状態の媒質中での輻射輸送の式

8.1 キルヒホッフの法則

すでにのべたように、一様な媒質（源泉関数が一定）の場合、輻射輸送方程式の解は、以下で得られる。

$$I_\nu = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}), \quad (35)$$

$\tau_\nu = \infty$ の極限では、 I_ν は黒体輻射 B_ν にならなければいけないので、熱平衡状態にある源泉関数 S_ν もまた黒体輻射 B_ν に等しい。源泉関数の定義は

$$S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{k_\nu}, \quad (36)$$

であるから、最終的に

$$\frac{j_\nu}{k_\nu} = B_\nu, \quad (37)$$

である。これをキルヒホッフの法則という。キルヒホッフの法則は物質の放射係数と吸収係数を結びつける重要な関係式である。

8.2 輝度温度を用いた輻射輸送の式

局所熱平衡状態にある物質中を伝播した際に輻射輸送方程式は

$$I_\nu = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + B_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}), \quad (38)$$

である。これを輝度温度と B_ν のレーリー・ジーンズ近似を用いると、

$$T_b = T_b(0)e^{-\tau_\nu} + T(1 - e^{-\tau_\nu}), \quad (39)$$

という形でかけ、輝度温度に関する式が得られる。ここで T は熱平衡状態にある物質の温度である。

9 太陽と地球の温度

9.1 太陽からのフラックスと太陽光度

地球が太陽から受け取るフラックス F_ν は、輝度 B_ν を用いて

$$F_\nu = \int B_\nu \cos \theta d\Omega \approx B_\nu \Omega_\odot \quad (40)$$

とかける。ここで Ω_\odot は地球から太陽を見込む立体角であり、具体的には地球を中心とする半径 1 天文単位 (a) の球の面積に対する太陽の断面積の比として得られるから、

$$\Omega_\odot = 4\pi \frac{\pi r_\odot^2}{4\pi a^2}. \quad (41)$$

これらの関係を用いると、

$$F_\nu = \left(\frac{r_\odot}{a}\right)^2 \pi B_\nu, \quad (42)$$

となる。また、全周波数にわたって積分した総フラックス F は、

$$F = \left(\frac{r_\odot}{a}\right)^2 \pi \int B_\nu d\nu \quad (43)$$

である。 F は地球の位置から太陽を見たときに単位面積を単位時間あたりに通過するエネルギーである。太陽の光度 L_\odot は、これを全方向で積分したものであるから、これに a を半径とする球の表面積 $4\pi a^2$ をかけて

$$L_\odot = 4\pi a^2 \times F = 4\pi r_\odot^2 \times \pi \int B_\nu d\nu, \quad (44)$$

となる。ここで、太陽の表面積は $S_\odot = 4\pi r_\odot^2$ であることから、 $\pi \int B_\nu d\nu$ は単位面積、単位時間あたりの放射エネルギー l を表している。すなわち、これらを用いると、

$$L_\odot = S_\odot \times l \quad (45)$$

$$F = \left(\frac{r_\odot}{a}\right)^2 \times l \quad (46)$$

$$S_\odot = 4\pi r_\odot^2 \quad (47)$$

$$l = \pi \int B_\nu d\nu \quad (48)$$

9.2 シュテファン・ボルツマンの法則

黒体の単位面積、単位時間あたりの放射エネルギー l を求める。黒体の輝度 B_ν は、

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}, \quad (49)$$

であり、

$$x \equiv \frac{h\nu}{kT}, \quad (50)$$

を用いると、

$$\begin{aligned} \int B_\nu d\nu &= \int \frac{2hx^3}{c^2} \left(\frac{kT}{h}\right)^3 \frac{1}{e^x - 1} \frac{kT}{h} dx, \\ &= \frac{2k^4 T^4}{c^2 h^3} \int \frac{x^3}{e^x - 1} dx, \end{aligned}$$

となり、さらに

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

を用いると、結果的に

$$\int B_\nu d\nu = \frac{2\pi^4 k^4 T^4}{15c^2 h^3}, \quad (51)$$

となる。よって黒体の単位面積あたりの放射エネルギー l は、

$$l = \pi \int B_\nu d\nu = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4 \equiv \sigma T^4, \quad (52)$$

ここで σ はシュテファン・ボルツマン定数

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4 \quad (53)$$

である。すなわち、黒体からの全放射エネルギーは温度 T の 4 乗に比例することがわかる。この関係式をシュテファン・ボルツマンの法則という。

9.3 例 1 : 太陽の放射エネルギー

太陽の光度 L_\odot (単位時間あたりのエネルギー放射量) はシュテファン・ボルツマンの法則から簡単に見積もることができる。

$$L_\odot = 4\pi R_\odot^2 l = 4\pi R_\odot^2 \sigma T^4, \quad (54)$$

ここで太陽半径 R_\odot は 70 万 km = 7×10^8 m、表面温度 T は約 5800 K であるから、これらの値を代入すると

$$L_\odot \sim 3.9 \times 10^{26} \text{ W}$$

を得る。日本の最新鋭の原子力発電所の最大出力が 100 万 kW = 10^9 W であるから、太陽エネルギーが桁違いに大きいことがわかる。

9.4 例 2 : 地球の温度

地球が太陽から単位時間あたり受け取るエネルギー量 $P_{\oplus, \text{rec}}$ は、総フラックス F に地球の断面積をかけて得られる。すなわち、

$$P_{\oplus, \text{rec}} = F \times \pi r_\oplus^2 \times (1 - A), \quad (55)$$

ここで A は地球の反射率 (アルベドと呼ばれる) を表し、最後の $(1 - A)$ の項は反射されずに地球表面に吸収されるエネルギーの割合を表している。人工衛星からみた地球が明るく輝いているのは A が 0 でなく、太陽光を反射しているからである ($A \sim 0.3$ 程度である)。この式に式 (46) を代入して整理すると、

$$P_{\oplus, \text{rec}} = \left(\frac{r_\odot^2}{a^2} \right) \sigma T_\odot^4 \times \pi r_\oplus^2 \times (1 - A) \quad (56)$$

一方、地球表面の温度を T_{\oplus} としするとき、地球表面から放射される単位時間あたりのエネルギー $P_{\oplus,\text{rad}}$ は

$$P_{\oplus,\text{rad}} = 4\pi r_{\oplus}^2 \sigma T_{\oplus}^4. \quad (57)$$

受け取るエネルギーと放射するエネルギーがつりあっているとすると ($P_{\oplus,\text{rec}} = P_{\oplus,\text{rad}}$) と、

$$\frac{P_{\oplus,\text{rec}}}{P_{\oplus,\text{rad}}} = \frac{(r_{\odot}^2/a^2)\sigma T_{\odot}^4 \times \pi r_{\oplus}^2 \times (1-A)}{4\pi r_{\oplus}^2 \sigma T_{\oplus}^4} = 1, \quad (58)$$

これを整理すると、

$$\frac{r_{\odot}^2 T_{\odot}^4 (1-A)}{4a^2 T_{\oplus}^4} = 1,$$

より

$$T_{\oplus} = (1-A)^{1/4} \sqrt{\frac{r_{\odot}}{2a}} T_{\odot}, \quad (59)$$

となり、地球の表面温度は、太陽温度 T_{\odot} 、太陽半径 r_{\odot} 、太陽地球距離 a 、および反射率 A で決まることがわかる（地球の半径 r_{\oplus} にはよらない）。この式に具体的な値を代入すると、

$A = 0$ の場合、 $T_{\oplus} = 279 \text{ K}$ （摂氏 6 度）

$A = 0.3$ の場合、 $T_{\oplus} = 255 \text{ K}$ （摂氏 -18 度）

となり、地球の表面温度にほぼ対応していることがわかる。

10 輝線観測の基礎

10.1 特殊相対論的なドップラー効果

天体が観測者に対して速度 v （遠ざかる方向を正とする）で等速直線運動しているとしたときに、特殊相対論的なドップラー効果による周波数変化は次の式で書ける。

$$\nu = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+(v/c)\cos\theta} \nu_0. \quad (60)$$

ここで、 ν_0 は静止系で観測される周波数であり、 ν は観測される周波数である。式 (60) のうち、分母は天体の視線方向の運動によって波長が引き伸ばされる効果を表す。

仮に天体が観測者に対して静止していた時に、天体から観測者へ伝播する波長 λ の電磁波を考える。天体と観測者間の距離 d としたときに、時間間隔 $t = d/c$ の間に $n = d/\lambda$ 個の波が放出される。一方、天体が観測者に対して速度 v で運動している場合、天体と観測者間の距離は時間間隔 t の後には

$$d' = d + (v \cos \theta)t \quad (61)$$

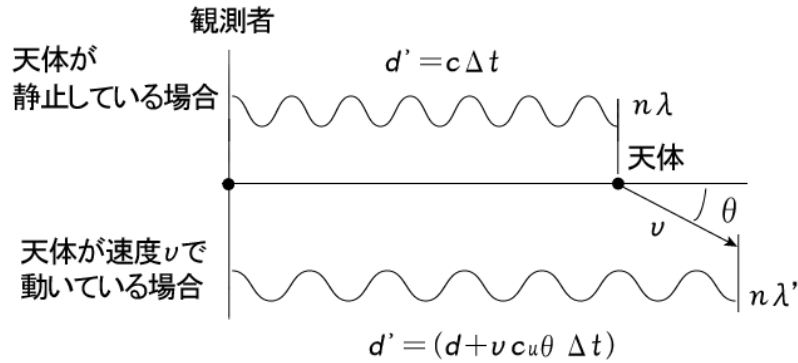


図 11: 天体の運動による波長の変化

に広がり、また、波の数 n が不変であることから、

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{d + (v \cos \theta)t}{d} = 1 + \frac{v}{c} \cos \theta, \quad (62)$$

これを $c = \lambda\nu$ を用いて周波数に関する式に書き直すと、

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{1 + (v/c) \cos \theta}. \quad (63)$$

また、ドップラー効果の式 (60) の分子は特殊相対論的な時間の遅れの効果を表す。すなわち、観測者から見ると、運動している天体の時計の進み方は $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 倍になり、周波数もこれに比例して小さくなる。すなわち、

$$\frac{\nu''}{\nu} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (64)$$

この効果は天体の運動速度の大きさのみによるので、天体が視線に直交する方向に運動している場合 ($\theta = \pi/2$) でも周波数が変化する (横ドップラー効果)。これら 2 つの効果により、最終的に特殊相対論的なドップラー効果は式 (60) で書ける。

もし、天体が視線方向にのみ運動しているとする ($\theta = 0$)、式 (60) は、

$$\nu = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c} \nu_0 = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \nu_0, \quad (65)$$

となる。あるいは、波長についての式は、

$$\lambda = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \lambda_0, \quad (66)$$

10.2 速度が小さいときの近似式

$v/c \ll 1$ の時の近似式を考える。式 (65) の両辺を 2 乗して

$$\left(1 + \frac{v}{c}\right)\nu^2 = \left(1 - \frac{v}{c}\right)\nu_0^2$$

これを v/c について解くと、

$$\frac{v}{c} = \frac{\nu_0^2 - \nu^2}{\nu_0^2 + \nu^2}$$

ここで、ドップラーシフトによる周波数変化量 $\Delta\nu$ を

$$\Delta\nu \equiv \nu - \nu_0, \quad (67)$$

で導入すると、

$$\begin{aligned} \frac{v}{c} &= \frac{\nu_0^2 - (\nu_0 + \Delta\nu)^2}{\nu_0^2 + (\nu_0 + \Delta\nu)^2} \\ &= \frac{-2\Delta\nu\nu_0 - \Delta\nu^2}{2\nu_0^2 + 2\Delta\nu\nu_0 + \Delta\nu^2} \\ &= \frac{-\Delta\nu/\nu_0 - \Delta\nu^2/2\nu_0^2}{1 + \Delta\nu/\nu_0 + \Delta\nu^2/2\nu_0^2} \\ &\approx \left(-\frac{\Delta\nu}{\nu_0} - \frac{\Delta\nu^2}{2\nu_0^2}\right) \left(1 - \frac{\Delta\nu}{\nu_0}\right) \end{aligned}$$

より最終的に、

$$\frac{v}{c} \approx -\frac{\Delta\nu}{\nu_0} + \frac{\Delta\nu^2}{2\nu_0^2}, \quad (68)$$

を得る。

10.3 視線速度の電波天文的な定義、光学天文的な定義

さらに、一次の近似で十分な場合、式 (68) はより簡略化できて

$$\frac{v}{c} = -\frac{\Delta\nu}{\nu_0}, \quad (69)$$

である。通常、電波天文学における視線速度 v_{rad} は、式 (69) を使って定義される。

一方、波長と視線速度の関係式 (66) を用いて、上と動揺に v/c について求めると、

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} - \frac{\Delta\lambda^2}{2\lambda_0^2}, \quad (70)$$

となり、一次近似では、

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}, \quad (71)$$

となる。光学天文学での視線速度はこの式を用いて定義されることが多い。

注意すべきこととして、式 (69) と式 (71) を用いて定義される視線速度は一次近似であるので、2 次以上の項を考慮すると一致しない。このような混乱を避けるには（特に宇宙論的な遠方天体を観測する際の波長や周波数を求める場合）、以下で定義される赤方偏位 z を使うのが良い。

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = (1 + z) \quad (72)$$

10.4 熱運動による線幅

温度 T の熱平衡状態にあるガス中の粒子のエネルギー分布は以下で与えられる。

$$f(E) \propto \exp(-E/kT), \quad (73)$$

簡単のために粒子のエネルギーとして粒子の内部エネルギーは考えず運動エネルギーのみを考えると。個々の粒子の運動エネルギー E は、

$$E = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2), \quad (74)$$

と書け、ここで m は粒子の質量、 v_x, v_y, v_z は 3 次元の運動速度成分を表す。よって、分布関数 $f(E)$ は

$$f(E) \propto \exp\left(-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\right) \quad (75)$$

となる。一方、ガウス分布の式

$$f_{\text{gauss}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right], \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{gauss}}(x) dx = 1 \quad (76)$$

を用いて分布関数を規格化すると、

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right], \quad (77)$$

この分布はマクスウェル分布と呼ばれる。

電波望遠鏡で輝線を観測すると、熱運動によるドップラー効果により視線方向の運動速度が広がって観測される。このときの輝線の形状は、マウスウェル分布の x, y 方向を積分して（視線を z 方向に取る）

$$\phi(v_z) = \iint f dv_x dv_y = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right), \quad (78)$$

というガウス分布でかける。このような輝線の形状を現す関数を、line profile function と呼ぶ。

あるいは、観測される周波数スペクトル上での拡がり

$$\frac{v_z}{c} = -\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0}, \quad (79)$$

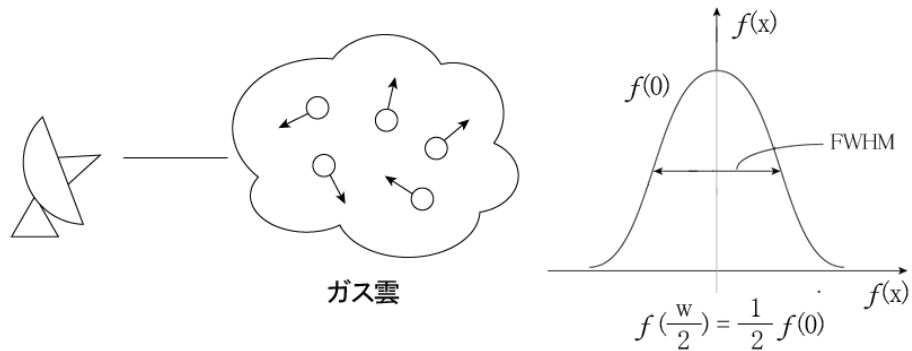


図 12: ガスの熱運動による線幅

より、規格化した $\phi(\nu)$ は、

$$\phi(\nu) = \left(\frac{mc^2}{2\pi k T \nu_0^2} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{mc^2(\nu - \nu_0)^2}{2k T \nu_0^2} \right) \quad (80)$$

ここで、

$$\int \phi(\nu) d\nu = 1, \quad (81)$$

である。

10.4.1 半値幅

ガウス分布などにおいて、最大値の半値を与える分布幅を半値幅 (FWHM: Full Width at Half Maximum) という。例えばガウス分布 f_{gauss} の場合、

$$f_{\text{gauss}}(\text{FWHM}/2) = 1/2 \quad (82)$$

より、

$$\text{FWHM} = 2\sqrt{2 \ln 2} \sigma \approx 2.35\sigma \quad (83)$$

と書ける。半値幅はスペクトルの線幅を表すのに最も良く使われる。

10.4.2 線幅の例

熱運動する気体粒子についてマクスウェル分布の分散 σ は、以下で与えられる。

$$\sigma = \sqrt{\frac{kT}{m}} \quad (84)$$

以下にいくつかの例について、観測される線幅がどれくらいになるかを示す。

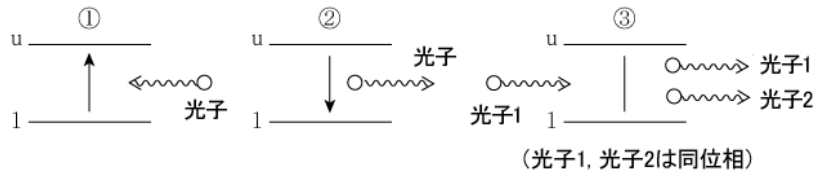


図 13: 吸収・放射の模式図

- $T = 10 \text{ K}$ の水素分子ガス : $\sigma = 0.21 \text{ km/s}$, $\text{FWHM} = 0.48 \text{ km/s}$
- $T = 100 \text{ K}$ の中性水素ガス : $\sigma = 0.91 \text{ km/s}$, $\text{FWHM} = 2.14 \text{ km/s}$
- $T = 10^4 \text{ K}$ の電離ガス : $\sigma = 9.1 \text{ km/s}$, $\text{FWHM} = 21.4 \text{ km/s}$

すなわち、熱運動による線幅は、典型的な星間空間では $1 \sim$ 数 10 km/s のオーダーである。なお、実際にはガス雲における内部構造の運動などで、完全なガウス分布からははずれた線幅が観測されることも多々ある。

11 アインシュタイン係数

準位 $1, 2 (E_2 > E_1)$ とする) の 2 準位からなる単純な原子モデルを考える。このとき $1, 2$ 間でおこる放射には次の 3 種類がある。

- 吸収 : 状態 1 の原子 / 分子が光子を吸収して状態 2 へ遷移
- 自発的放射 : 状態 2 \rightarrow 1 へ自然に遷移
- 誘導放射 : 外部から来た光子に誘発されて 2 \rightarrow 1 へ遷移

輝度 I_ν の放射が、この 2 準位からなる物質に照射されたとき、上記の 3 種類の遷移が単位時間、単位体積あたりに起こる確率 R_1 、 R_2 、 R_3 はそれぞれ

$$R_1 \equiv B_{12} I_\nu n_1 \quad (85)$$

$$R_2 \equiv A_{21} n_2 \quad (86)$$

$$R_3 \equiv B_{21} I_\nu n_2 \quad (87)$$

と表すことができる。ここで、 n_1 、 n_2 はそれぞれの状態にある粒子密度である。また、 A_{21} 、 B_{12} 、 B_{21} はアインシュタイン係数と呼ばれ、それぞれの遷移確率を表す係数である。上の式から、各遷移確率はアインシュタイン係数およびその状態にある粒子密度 n_1 、 n_2 に比例することがわかる。

11.0.3 アインシュタインの関係式

各放射により放射された光子が持つエネルギーは $h\nu = E_2 - E_1$ であり、単位立体角あたりに放出されるエネルギーは $(h\nu/4\pi)$ である。ここで、輻射輸送方程式を考えると、

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{h\nu}{4\pi} [R_2 + R_3 - R_1] \phi(\nu) \quad (88)$$

ここで、 $\phi(\nu)$ は線幅を表す関数であり、 $\int \phi(\nu) d\nu = 1$ で規格化されているとする。上の式はアインシュタイン係数を用いて

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{h\nu}{4\pi} [A_{21}n_2 + B_{21}I_\nu n_2 - B_{12}I_\nu n_1] \phi(\nu)$$

より

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{h\nu}{4\pi} [-(B_{12}n_1 - B_{21}n_2)I_\nu + A_{21}n_2] \phi(\nu) \quad (89)$$

一方、吸収係数および放射係数を用いて書いた輻射輸送方程式は

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\kappa_\nu I_\nu + j_\nu. \quad (90)$$

上の2つの式を比較から、吸収係数 κ_ν および放射係数 j_ν について以下の関係を得る。

$$\kappa_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} (B_{12}n_1 - B_{21}n_2) \phi(\nu) \quad (91)$$

$$j_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} A_{21}n_2 \phi(\nu) \quad (92)$$

源泉関数は $S_\nu = j_\nu / \kappa_\nu$ で定義されるので、

$$S_\nu = \frac{A_{21}n_2}{B_{12}n_1 - B_{21}n_2} \quad (93)$$

ここで局所熱平衡状態を仮定すると、2つの準位の密度 n_1, n_2 について

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \quad (94)$$

の関係がある。ここで g_1, g_2 は統計的重み(エネルギー準位の縮退度)を表す。

$$S_\nu = \frac{A_{21}}{B_{12}g_1/g_2 \exp(h\nu/kT) - B_{21}} \quad (95)$$

を得る。すでに見たように局所熱平衡状態の場合 $S_\nu = B_\nu$ であり、黒体輻射の輝度 b_ν は

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (96)$$

であるから、 $S_\nu = B_\nu$ を満たすためには、以下の2つの関係が要求される。

$$A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21} \quad (97)$$

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21} \quad (98)$$

これらの2つの式はアインシュタインの関係式と呼ばれる。この式は熱平衡状態に基づいて導出したが、アインシュタインの会形式は温度 T によらず、熱平衡状態でなくとも成り立つ一般的な式である。アインシュタインの関係式を用いると、 A_{21} 、 B_{21} 、 B_{12} のうち1つが得られれば他の2つも決めることができる。

11.0.4 吸収係数と光学的厚み

吸収係数 κ_ν をアインシュタイン係数を用いて書き改めてみる。

$$\kappa_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} (B_{12}n_1 - B_{21}n_2)\phi(\nu') \quad (99)$$

に、アインシュタインの関係式を代入して B_{12} 、 B_{21} を消去する。

$$\begin{aligned} \kappa_\nu &= \frac{h\nu}{4\pi} \left(\frac{B_{12}}{B_{21}} n_1 - n_2 \right) B_{21} \phi(\nu') \\ &= \frac{h\nu}{4\pi} \left(\frac{g_2}{g_1} n_1 - n_2 \right) \frac{c^2}{2h\nu^3} A_{21} \phi(\nu') \\ &= \frac{c^2}{8\pi\nu^2} \frac{g_2}{g_1} n_1 \left(1 - \frac{g_1 n_2}{g_2 n_1} \right) A_{21} \phi(\nu') \end{aligned}$$

よって、

$$\kappa_\nu = \frac{c^2 g_2 n_1}{8\pi\nu^2 g_1} \left[1 - \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \right] A_{21} \phi(\nu') \quad (100)$$

さらにレーリー・ジーンズ近似 ($h\nu \ll kT$) の場合、

$$\kappa_\nu = \frac{c^2 h g_2 n_1}{8\pi\nu g_1 k} \frac{A_{21}}{T} \phi(\nu') \quad (101)$$

を得る。このとき光学的厚み τ_ν は

$$\tau_\nu = \int \kappa_\nu ds \quad (102)$$

より、

$$\tau_\nu = \frac{c^2 h g_2}{8\pi\nu g_1 k} \frac{A_{21}}{T} \phi(\nu') \int n_1 ds \equiv \frac{c^2 h g_2}{8\pi\nu g_1 k} \frac{A_{21}}{T} \phi(\nu') N_1 \quad (103)$$

ここで

$$N_1 = \int n_1 ds \quad (104)$$

は原子の柱密度を表す。すなわち、光学的厚み τ_ν は視線方向に積分した柱密度に比例する。また、物質の温度 T に反比例している。従って、光学的厚みが得られ、さらに物質温度 T が判れば、物質の存在量を求めることが可能である。

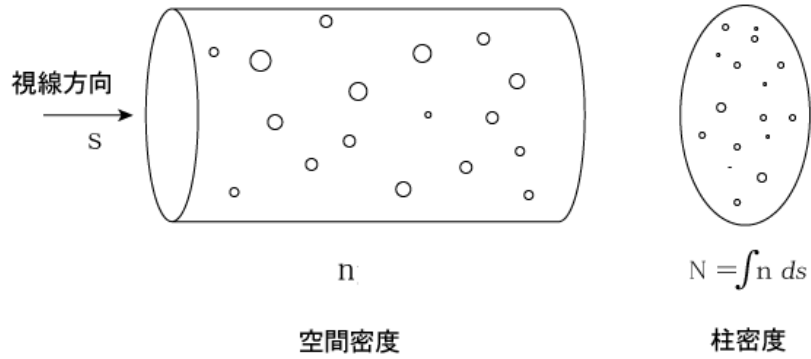


図 14: 空間密度と柱密度の関係

11.0.5 光学的厚みが小さい場合

光学的厚みが小さい場合、輝度温度で表した輻射方程式は

$$T_b = T_b(0) + \tau_\nu T \quad (105)$$

である。ここで T は物質の温度を表している。これに式 (103) を代入し、背景放射に対する温度増分 $\Delta T_b \equiv T_b - T_b(0)$ を導入すると、

$$\Delta T_b = \frac{c^2 h g_2}{8\pi \nu g_1 k} A_{21} N_1 \phi(\nu') \quad (106)$$

となり、 T が消去されていることがわかる。従って、 τ_ν が小さい場合、観測された輝度は物質の温度によらずに直接に柱密度に変換することが可能である。線幅を表す関数 $\phi\nu'$ を消去するために ν' で両辺を積分すると、

$$\int \Delta T_b d\nu' = \frac{c^2 h g_2}{8\pi \nu g_1 k} A_{21} N_1 \quad (107)$$

である ($\int \phi(\nu') d\nu' = 1$)。さらに、ドップラーシフトの関係式

$$\frac{v}{c} = -\frac{\nu' - \nu}{\nu} \quad (108)$$

より、 $d\nu' = -\nu/c d\nu$ であるから、

$$\frac{\nu}{c} \int \Delta T_b d\nu = \frac{c^2 h g_2}{8\pi \nu g_1 k} A_{21} N_1$$

これを N_1 について解くと

$$N_1 = \frac{8\pi \nu^2 g_1 k}{c^3 h g_2 A_{21}} \int \Delta T_b d\nu \quad (109)$$

この式が、光学的厚みが小さいときに、観測された輝度分布を物質の柱密度 N_1 に変換する式である。

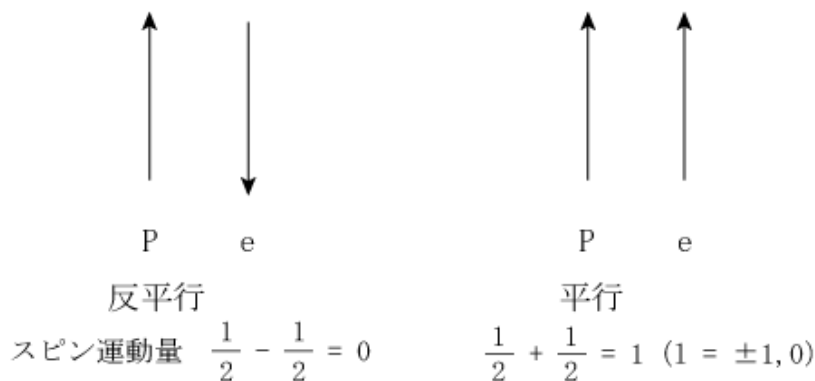


図 15: 中性水素の超微細構造

12 中性水素 21cm 線

電波天文学における輝線の中で、最も重要なものの一つが中性水素 (HI) の放射する 21cm である。水素原子は宇宙において最も基本的な原子であり、星の材料や核融合反応の燃料ともなる最重要原子である。中性水素は陽子と電子からなっており、両者のスピンの向きが平行か反平行かによって微細なエネルギー準位差が発生する (超微細構造)。この 2 準位間のエネルギー差は $\Delta E = 9.4 \times 10^{-25}$ J ($T = \Delta E/k = 0.068$ K) であり、このエネルギー準位間の遷位に伴って放射される電磁波は周波数 $\nu = 1420.405$ MHz の電波である。この電波の波長は $\lambda = 21.106$ cm であるので、このような中性水素の基底状態の超微細構造に伴う放射を中性水素 21cm 線 (HI21cm 線) と呼ぶ。

この遷移でのアインシュタイン係数は

$$A_{21} = 2.85 \times 10^{-15} \text{ sec}^{-1}$$

であることが知られており、遷移確率は極めて小さい。実際、1 個の水素原子で遷移がおこるのに掛かる時間は約 1 千 100 万年である。しかし宇宙には大量の水素が存在するので、その積分効果により、この電波を観測することができる。さらに輝線のドップラーシフトからガスの視線速度も計測できるので電波天文において非常に重要な観測対象である。

中性水素の超微細構造は、原子と分子のスピン (それぞれスピン 1/2) が平行な状態 $F = 1/2 + 1/2 = 1$ が上位、反平行な状態 $F = 1/2 - 1/2 = 0$ が下位にあたる。 $F = 1$ の状態は 3 重縮退状態であるので $g_2 = 3$ 、 $F = 0$ は縮退がなく $g_1 = 1$ である。

熱平衡状態では

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$$

である。銀河系の星間空間における中性水素ガスの温度は $T \approx 200$ K であり、一方 $\Delta E/k = 0.068$ K より $h\nu \ll kT$ である（レーリー・ジーンズ近似）。このとき

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} = 3 \quad (110)$$

が成り立つから、平行・反平行状態の中性水素を合わせた全柱密度 N_{HI} は

$$N_{\text{HI}} = N_2 + N_1 = 4N_1, \quad (111)$$

となる。この式からから、 N_{HI} は

$$N_{\text{HI}} = \frac{32\pi\nu^2 g_1 k}{c^3 h g_2 A_{21}} \int \Delta T_b dv = \chi_{\text{HI}} \int \Delta T_b dv \quad (112)$$

とかける。ここで χ_{HI} は観測される積分強度 $\int \Delta T_b dv$ を柱密度に換算する際の変換係数であり、

$$\chi_{\text{HI}} \equiv \frac{32\pi\nu^2 g_1 k}{c^3 h g_2 A_{21}} \quad (113)$$

である。ここに、上で紹介した定数の具体的な値を代入すると、

$$\chi_{\text{HI}} = 1.82 \times 10^{18} \text{ cm}^{-2}/(\text{K km s}^{-1})$$

である。

13 系外銀河の HI 観測

最初に HI が観測されたのはもちろん銀河系であり、1950 年台のことである。HI による銀河観測を考える一方、1970 年台後半から 80 年台になると WSRT (Westerbork Synthesis Radio Telescope) や VLA (Very Large Array) などの高い分解能を持った電波干渉計が登場し、系外銀河の中性水素ガス (HI) の観測が行われるようになった。ここでは、まず系外の円盤銀河の HI 観測について考え、その観測から中性水素ガスの質量や銀河の回転曲線、さらにはダークマターの分布などといった、銀河の動力学的性質を探る。

観測で得られる情報は、天球面上での各位置 (x, y) で、輝度温度 ΔT_b が視線速度 v の関数として得られる。すなわち、

$$\Delta T_b = \Delta T_b(x, y, v)$$

が観測量である。

13.1 中性水素の総質量

銀河における中性水素の総質量は T_b を全速度、全領域で積分して得ることができる。典型的には、回転曲線から示唆される銀河の質量に対して数%が

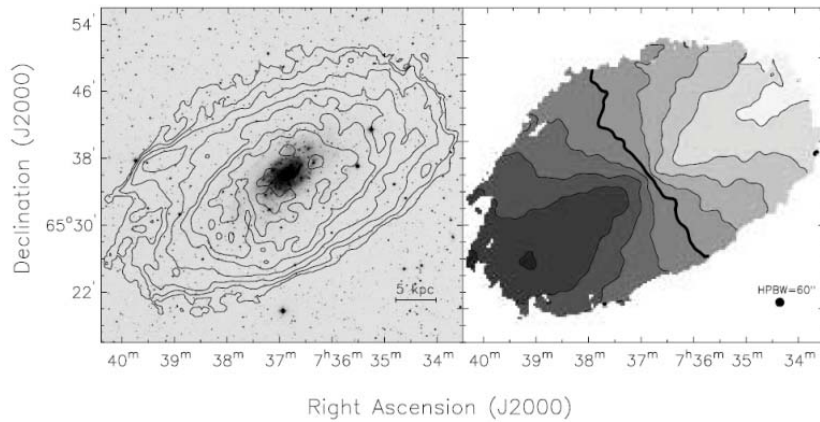


図 16: NGC2403 の HI 観測例。(左) 輝線温度分布、(右) 速度場

ら 10%程度であり、質量としては星やダークマターなど他の成分の方が重要である。すなわち銀河系のような平均的な銀河では、宇宙年齢の間に中性水素の大部分は星を作る材料として消費されたことを意味している。

13.2 中性水素の分布

円盤銀河における中性水素の分布の最大の特徴は、光学円盤よりも広がって分布していることである。このため、中性水素の視線速度を用いて、銀河中心から銀河円盤の外側までの広範囲にわたって銀河回転を計測できる。また、銀河の相互作用を調べる際にも、円盤より広がって分布している中性水素の観測は極めて効果的である。

13.3 中性水素の運動

円盤銀河内の中性水素ガスの運動は、第 1 次近似では銀河中心周りの円運動として表される。ただし、銀河円盤の回転はレコードや CD のような剛体回転ではなく、場所ごとに回転速度がことなる差動回転である。円運動の遠心力が銀河の重力とつりあっていると考えることにより中性水素の運動から銀河内の質量分布を得ることができる。これは銀河内のダークマターを探る重要な手段を与える。

14 回転曲線とダークマター

14.1 中性水素観測でみる銀河の回転

銀河中心距離 R の関数として回転速度 $V(R)$ を表したものを回転曲線という。HI 観測で得られる円盤銀河の速度場と銀河の回転曲線 $V(R)$ は、以下のような関係式で結ばれている。

$$V_{\text{obs}}(R, \phi) = V_{\text{sys}} + V(R) \cos \phi \sin i. \quad (114)$$

ここで、 i は銀河円盤の傾斜角であり、視線と銀河円盤の法線がなす角として定義される。すなわち、銀河円盤を真上から見ると $i = 0^\circ$ (フェイスオン)、真横から見ると $i = 90^\circ$ (エッジオン) である。 R および ϕ は観測点の銀河円盤上での位置 (極座標表示) であり、 ϕ は銀河の見かけの長軸方向を 0° とする。また、 V_{sys} は宇宙膨張に乗った銀河の後退速度である。HI ガスの速度場から銀河回転を得る際には、式 (114) の関係式を用いて、速度場を最も良く表すように回転曲線 $V(R)$ を求める。その際、円運動成分に乗らないような非対称運動など高次の成分についても残差として得ることができる。

14.2 質量分布

最も簡単な場合として球対称な質量分布を考えると、ある半径以内の質量 (Enclosed Mass) $M_r(r)$ は、密度分布 $\rho(r)$ を用いて次のように書ける。

$$M_r = \int 4\pi r^2 \rho(r) dr. \quad (115)$$

このような質量分布中を円運動する質点 (質量 m , $m \ll M_r$ とする) を考えると、遠心力と重力のつりあいより

$$\frac{mv_c^2}{r} = \frac{GM_r m}{r^2}, \quad (116)$$

という関係式が成り立つ。この式を回転速度 v_r について解くと以下の関係式を得る。

$$v_c = \sqrt{\frac{GM_r}{r}}. \quad (117)$$

この関係式は、円運動の速度から M_r を与え、さらに式 (115) を経て、質量分布を与える。最も単純な場合として質量分布が中心におかれた質量 M の質点とすると、 $v_c = \sqrt{GM/r}$ となり、ケプラー回転の速度となる。

上式を用いると、銀河系の回転速度から銀河系の質量分布を求めることができる。すなわち、式 (117) を質量 M_r について解いた形に変形すると、

$$M_r = \frac{rv_c^2}{G}, \quad (118)$$

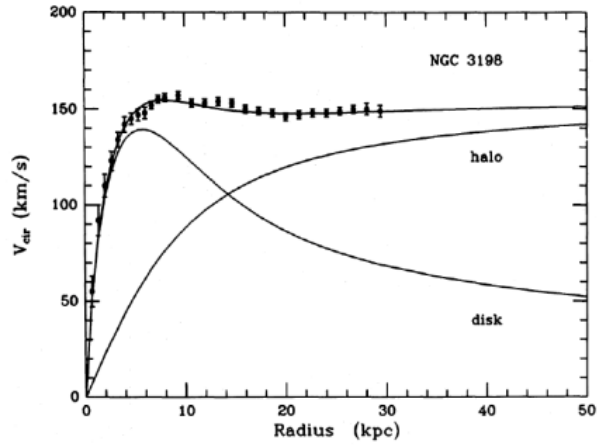


図 17: NGC3198 の回転曲線

となる。平坦な回転曲線 ($v_c = \text{const.}$) からは $M_r \propto r$ および、 $\rho \propto r^{-2}$ が示唆される。

銀河系や一般の銀河を考えると単位系として r を kpc、 v_c を km s^{-1} 、 M_r を太陽質量 $M_\odot (=1.99 \times 10^{30} \text{ kg})$ で表すことが多く、その単位系では

$$\left(\frac{M_r}{M_\odot}\right) = 2.32 \times 10^5 \left(\frac{r}{\text{kpc}}\right) \left(\frac{v_c}{\text{km s}^{-1}}\right)^2, \quad (119)$$

となる。例えば、典型的な銀河の値として $r = 20 \text{ kpc}$ 、 $v_c = 200 \text{ km s}^{-1}$ を代入すると、 $M_r = 1.9 \times 10^{11} M_\odot$ という値になる。

14.3 円盤銀河の質量分布モデル

銀河円盤の光度分布は指数関数分布

$$I(R) = \exp(-R/h), \quad (120)$$

で良く近似される。ここで h はスケール長であり、通常の銀河では数 kpc のオーダーである。この分布は中心集中度が極めて高く、指数関数円盤の回転曲線を描くと、 $2.2h$ で最大値となり、その外側ではケプラー的に落ち込む形になる。従って、観測された回転曲線を再現するために、銀河円盤に加えてハロー成分を考える必要がある。ハローの質量分布としては銀河の外側で $\rho \propto r^{-2}$ のようにふるまうものとして

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + (r/a)^2}, \quad (121)$$

というような密度分布や、 N 体力学計算から求められた、

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{(r/a)(1 + r/a)^2} \quad (122)$$

という密度分布モデルは最近よく議論に使われる。 ρ_0 と a は典型的な密度と半径である。発見者達の名前を取って NFW モデル (Navarro-Frenk-White model) と呼ばれることが多い。

15 銀河系の HI 観測

15.1 局所静止基準と銀河定数

局所静止基準 (LSR: Local Standard of Rest) は、「太陽の位置にあり銀河系中心の周りを円運動する仮想的な点」として定義され、銀河系の回転を考える際の基準となる重要な概念である。図 18 に示すように、LSR と銀河系中心の距離は R_0 、LSR が持つ銀河系回転の速度は Θ_0 と表される。この 2 つの定数は銀河定数 (Galactic Constant) と呼ばれ、太陽位置における銀河系回転を記述する最も基本的な量である。銀河定数の値については多数の研究があり、1985 年の国際天文学連合 (IAU: International Astronomical Union) の決議では、それまでの研究の平均値として以下の値が推奨されている。

$$R_0 = 8.5 \text{ kpc}, \quad \Theta_0 = 220 \text{ km s}^{-1}. \quad (123)$$

その後の研究では、 R_0 に関しては上記よりやや小さめの 7 kpc から 8 kpc 程度の値を出すものもあり、また、 Θ_0 については最小値 180 km s^{-1} から最大値 270 km s^{-1} まで広範囲にわたっており、式 (123) もこの程度の不定性を含んでいることを認識する必要がある。

太陽を含むすべての星は、銀河系回転に加えて星ごとに固有のランダムな運動成分をもっている。太陽系の LSR に対する運動速度は 1985 年の国際天文学連合推奨値として

$$(U_\odot, V_\odot, W_\odot) = (10.0, 15.4, 7.8) \text{ km s}^{-1}, \quad (124)$$

となっている。3 つの軸の向きは図 18 に示してあり、 X 方向 (速度 U 成分) は銀河系中心方向に、 Y 方向 (速度 V 成分) は銀河系回転の方向に、 Z 方向 (速度 W 成分) は北銀局の方向にとる。

15.2 視線速度と接線速度

天体が銀河系回転によって完全な円運動をしている状況を考え、LSR から天体を観測したときの視線方向の速度 V_r を求める。 V_r は観測天体と LSR の速度成分の差として与えられるから、図 (18) より、

$$V_r = \Theta \sin(180^\circ - \phi) - \Theta_0 \sin l. \quad (125)$$

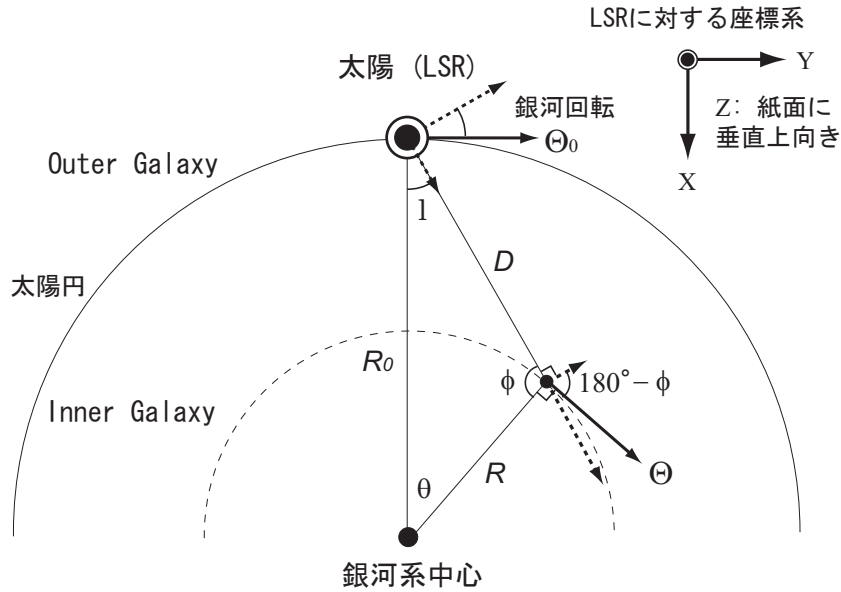


図 18: 銀河系円盤を円盤上空（北銀極方向）から見たときの模式図。太陽 (LSR)、銀河系中心、太陽円などの位置関係と、天体の銀河回転運動を LSR から観測する際の視線および接線速度成分を図示してある。右の座標系は LSR に対する運動を記述する際の座標を表す。

となる。ここで、 Θ は観測天体位置での銀河回転の速度である。三角関数の性質より $\sin(180^\circ - \phi) = \sin \phi$ 、 $\cos(180^\circ - \phi) = -\cos \phi$ であり、また、正弦定理より $\sin \phi / R_0 = \sin l / R$ が成り立つ。さらに、図 (18) の幾何学的関係から $R_0 \cos l = D - R \cos \phi$ 、の関係が得られるので、これらの関係式を式 (125) に代入して整理すると、

$$V_r = \left(\frac{\Theta}{R} - \frac{\Theta_0}{R_0} \right) R_0 \sin l, \quad (126)$$

という関係が得られる。これが、銀河系内の天体を LSR から観測したときの速度を記述する基本式である。なお、余弦定理より、

$$R^2 = D^2 + R_0^2 - 2DR_0 \cos l, \quad (127)$$

の関係があり、 D は R_0 、 R 、 l を用いて以下のように表すことができる。

$$D = R_0 \cos l \pm \sqrt{R^2 - R_0^2 \sin^2 l}. \quad (128)$$

右辺第 2 項が 0 となるのは $R = \pm R_0 \sin l$ が成り立つときである。この点は、銀河系中心を中心とする円と LSR から観測した視線とが接する点 (tangent point) になっていて、このような点の集合は、 R_0 を直径とする円になる。式 (128) で第 2 項の符号が正になるのは、このような円の外側の領域である。

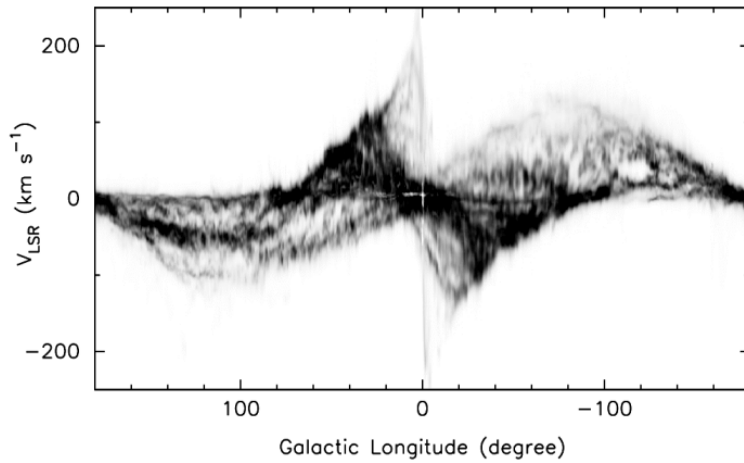


図 19: 銀河系の HI の $l-v$ 図

16 銀河系の HI 観測

16.1 銀河系の $l-v$ 図と回転曲線

銀河系の HI を観測すると、各方向 (l, b) につき電波強度 ΔT_b が視線速度 v の関数として得られる。これを図示するには様々な方法があるが、良く使われる方法として、横軸に l 、縦軸に v をとって電波強度を図示した $l-v$ 図がある (Position-Velocity diagram, PV 図) と呼ばれる。

銀河面 ($b = 0^\circ$) の $l-v$ 図は銀河系回転を議論する上で重要である。 $l-v$ 図から銀河系の回転曲線を取り出すには次のような方法がある。

- 太陽系よりも内側の領域：終端速度を利用する
- 太陽系よりも外側の領域：HI ガスをリング状に輪切りにし、見かけのその厚みを利用する。

16.1.1 $l-v$ 図の終端速度

ある視線方向 l での視線速度の局大値 (終端速度) は、 $\partial V_r / \partial D = 0$ が成り立つ場所で得られるから、

$$\frac{\partial V_r}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\Theta}{R} \right) \frac{\partial R}{\partial D} R_0 \sin l = 0. \quad (129)$$

ここで $\partial R / \partial D$ は D, R, R_0 に関する余弦定理から

$$\frac{\partial R}{\partial D} = \frac{D - R_0 \cos l}{R}. \quad (130)$$

従って回転速度 Θ によらず、 $D - R_0 \cos l = 0$ を満たす点が終端速度を与える。この点は銀河系中心を中心とした円と太陽系から観測した視線が接する場所 (Tangent point) であり、このような点の集合は銀河系中心と太陽系を結ぶ直線を直径とする円となる。終端速度をあたえる点では以下のような関係が成り立ち、終端速度 V_{term} から直接に銀河回転の速度 $\Theta(R)$ を決定できる。

$$R = R_0 \sin l, \quad V_{\text{term}} = \Theta(R) - \Theta_0 \sin l. \quad (131)$$

なお、太陽円の内側 ($-90 \leq l \leq +90^\circ$) では視線速度の極大値 V_{term} が存在するが、太陽円の外側では視線速度は視線方向の距離 D に対して単調に変化し、極大値は存在しない。

16.1.2 HI リングの見かけの厚み

太陽円の外側での回転曲線の決定法としては、HI ガス円盤の幾何学的厚みを用いる方法が考案され、重要な役割を果たしている。この方法では、銀河系の HI ガス円盤を同心円上に輪切りにして考え、それぞれのリングではガスの厚さ (銀河面に垂直方向) が一定だとする。観測される視線速度の式より、

$$V_r = W(R) \sin l, \quad W(R) \equiv \left(\frac{\Theta}{R} - \frac{\Theta_0}{R_0} \right) R_0, \quad (132)$$

であり、 W が一定となる視線速度を各 l 方向で取ってくることで、銀河円盤の HI ガスをリング状に切り出すことになる。

このときガス円盤の見かけの厚さ b_a は、

$$b_a = \arctan\left(\frac{z_0}{D}\right) = \arctan\left(\frac{z_0}{R_0 \cos l + \sqrt{R^2 - R_0^2 \sin^2 l}}\right), \quad (133)$$

となる。ここで、 z_0 は実際のガス円盤の厚みである。リングの半径 R/R_0 が異なると、式 (133) の l に対する振る舞いも非線形に大きく変わる。この効果を使って実際に切り出したリングの見かけの厚みをフィットすると、最終的にリングの半径 R/R_0 と厚さ z_0/R_0 を同時に決定することができる (R_0 で規格化した値が求まることに注意)。この R/R_0 の値を式 (132) の $W(R)$ に代入すると、リング状での回転速度 $\Theta(R)$ を決定することができる。

これらの方法を組み合わせて求めた銀河系の回転曲線は、太陽系近傍では 10 km s^{-1} 程度、また最も外側の領域でも 30 km s^{-1} 程度の誤差で決定されている。その形状は概ね平坦な回転速度則を示しており、これは銀河系と同規模の系外円盤銀河で観測された回転曲線のふるまいと一致している。しかし、回転曲線の正確なふるまいは銀河定数 R_0 および Θ_0 に依存し、銀河系の回転曲線を絶対的な値として確立するためには、銀河定数 R_0 および Θ_0 の精密な決定も併せて必要である。

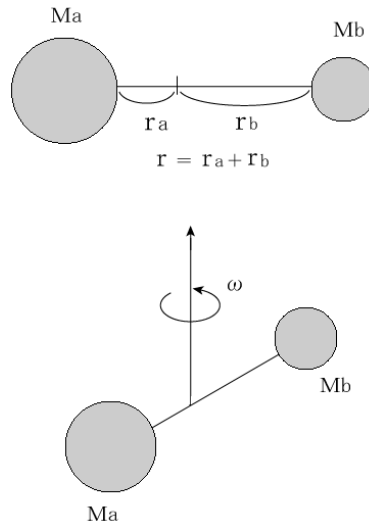


図 20: 2 原子分子の回転の模式図

17 分子からの電波放射

分子は原子に比べて複雑な構造をしており、振動や回転にともなう複数の量子状態間の遷移によって電磁波を放射する。振動遷移にともなう放射は多くの場合赤外線領域となるが、回転遷移では電波帯の放射も多数あり、電波天文学の重要な観測対象である。

17.1 2 原子分子の回転遷移

星間空間において(特に低温度領域では)、 H_2 、 CO 、 OH 、 SiO などの 2 原子分子が存在する。古典力学的に考えると、分子の回転運動(重心周り)のエネルギー E_{rot} は

$$E_{rot} = \frac{1}{2}\omega^2(m_a r_a^2 + m_b r_b^2). \quad (134)$$

ここで、 m_a 、 m_b は 2 つの原子の質量であり、 r_a 、 r_b は分子の重心からそれぞれ原子までの距離である。また、 ω は回転角速度である。一方、2 原子間の距離を r とすると

$$r_a = \frac{m_b}{m_a + m_b}r, \quad r_b = \frac{m_a}{m_a + m_b}r, \quad (135)$$

であるから、 E_{rot} は

$$E_{rot} = \frac{1}{2}\left(\frac{m_a m_b}{m_a + m_b}\right)r^2\omega^2 \equiv \frac{1}{2}\mu r^2\omega^2, \quad (136)$$

ここで

$$\mu \equiv \frac{m_a m_b}{m_a + m_b}, \quad (137)$$

は換算質量である。さらに、

$$I \equiv \mu r^2, \quad (138)$$

で定義される慣性モーメントを用いると、

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (139)$$

となる。一方、古典力学的な回転の角運動量 L_{rot} は、

$$L_{\text{rot}} = I \omega, \quad (140)$$

であるから、エネルギー E_{rot} を角運動量 L_{rot} で表すと、

$$E_{\text{rot}} = \frac{L_{\text{rot}}^2}{2I} \quad (141)$$

となる。

古典的な回転エネルギーが上記のように記述できるとき、量子力学によれば L を角運動量演算子で置き換えてハミルトニアン H を作り、シュレーディンガー方程式 $H\Psi = E\Psi$ を解くことで、エネルギー固有値が以下のように得られる。

$$E = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1) = \frac{h^2}{8\pi^2 I} J(J+1). \quad (142)$$

ここで、 $\hbar = h/2\pi$ であり、 $J = 0, 1, 2, \dots$ は回転量子数である。CO のように非対称な分子は、電子双極子モーメントが 0 でないため、双極子放射が可能であり、遷移の際の量子数差 ΔJ は $\Delta J = \pm 1$ となる。一方、 H_2 のように対称な分子は双極子放射は禁止され、代わりに四重極放射での放射になり、このとき $\Delta J = \pm 2$ である。

17.1.1 いくつかの重要な分子の例

H_2 , J=2-0: $r=0.074$ nm, $\nu = 1.1 \times 10^4$ GHz, $\lambda = 27$ μm (中間赤外線)

CO, J=1-0: $r=0.113$ nm, $\nu = 115$ GHz, $\lambda = 2.6$ mm (ミリ波)

SiO, J=1-0: $r=0.151$ nm, $\nu = 43$ GHz, $\lambda = 7$ mm (ミリ波)

17.2 多原子分子

3原子以上の分子も星間空間で多数観測されている。例えば、 H_2O , HCN, HCO^+ , NH_3 , CH_3OH 等。

18 輝線の放射条件

18.1 励起温度

局所熱平衡状態 (LTE) が成り立たない場合、ある 2 つの準位分布について

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_{\text{ex}}}\right), \quad (143)$$

で定義される温度 T_{ex} を励起温度という。励起温度は LTE の場合、すべての準位に対して等しく、系の温度 (熱運動の温度) T に等しい。一方、LTE でない場合、励起温度 T_{ex} は準位ごとに異なる値を取り得る。

LTE の場合の輻射輸送の式との比較から、励起温度 T_{ex} のガス中を伝播したときの輝度温度は、

$$T_b = T_b(0)e^{-\tau_\nu} + T_{\text{ex}}(1 - e^{-\tau_\nu}), \quad (144)$$

と書ける。

18.2 励起温度を決める要因

今、放射と衝突によって 2 準位間の遷移がおこる状態を考える。衝突による遷移確率を C_{12} , C_{21} 放射による遷移確率を R_{12} , R_{21} とする。衝突優勢で平衡状態が達成されている場合、2 準位間の遷移のつり合いより、

$$n_1 C_{12} = n_2 C_{21}, \quad (145)$$

となる。一方、LTE の場合

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_k}\right), \quad (146)$$

ここで T_k は熱運動による運動学的温度 (kinetic temperature) である。上の 2 つの式より

$$C_{12} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_k}\right) C_{21} \quad (147)$$

の関係が成り立つ。

一方、放射についても考えると、吸収によって上の準位に遷移する確率は

$$R_{12} = B_{12} I_\nu, \quad (148)$$

誘導放射と自発放射によって下の準位に遷移する確率は

$$R_{21} = B_{21} I_\nu + A_{21}, \quad (149)$$

と書ける。放射と衝突両者を含めて 2 準位間の遷移確率がつり合う状況を考えて

$$n_1(C_{12} + R_{12}) = n_2(C_{21} + R_{21}), \quad (150)$$

これより

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{C_{12} + R_{12}}{C_{21} + R_{21}} = \frac{C_{12} + B_{12}I_\nu}{C_{21} + A_{21} + B_{21}I_\nu} \quad (151)$$

式 (147) および、およびアインシュタインの関係式

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}, \quad (152)$$

$$A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21}, \quad (153)$$

より、

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2 e^{-h\nu/kT_k} C_{21} + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu A_{21}}{g_1 C_{21} + A_{21} \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu\right)} \quad (154)$$

以下、電波帯なのでレーリーゼンズ近似 ($h\nu \ll kT$) が成立する状況を考える。輝度 I_ν は輝度温度 T_b を用いて

$$I_\nu = \frac{2k\nu^2}{c^2} T_b, \quad (155)$$

とかけるから、式 (154) は

$$\begin{aligned} \frac{n_2}{n_1} &= \frac{g_2 \left(1 - \frac{h\nu}{kT_k}\right) C_{21} + \frac{kT_b}{h\nu} A_{21}}{g_1 C_{21} + A_{21} \left(1 + \frac{kT_b}{h\nu}\right)} \\ &= \frac{g_2}{g_1} \left[1 - \frac{\frac{h\nu}{kT_k} C_{21} + A_{21}}{C_{21} + A_{21} \left(1 + \frac{kT_b}{h\nu}\right)} \right] \\ &\approx \frac{g_2}{g_1} \left[1 - \frac{\frac{h\nu}{kT_k} C_{21} + A_{21}}{C_{21} + \frac{kT_b}{h\nu} A_{21}} \right] \end{aligned} \quad (156)$$

となる。ここで、最後の近似では $kT_b/h\nu \gg 1$ を用いている。

一方、レーリーゼンズ近似 ($h\nu \ll kT$) では、式 (164) は、

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} \left(1 - \frac{h\nu}{kT_{\text{ex}}}\right), \quad (157)$$

と近似できる。上の2つの式が等しくなるためには、結局

$$\frac{h\nu}{kT_{\text{ex}}} = \frac{\frac{h\nu}{kT_k} C_{21} + A_{21}}{C_{21} + \frac{kT_b}{h\nu} A_{21}} \quad (158)$$

が成り立つ必要がある。これを励起温度について解くと、

$$T_{\text{ex}} = \left(\frac{h\nu}{k}\right) \frac{C_{21} + \frac{kT_b}{h\nu} A_{21}}{\frac{h\nu}{kT_k} C_{21} + A_{21}}. \quad (159)$$

となる。ここで温度の次元を持つ量 T_0 を以下で定義し、

$$T_0 = \frac{h\nu}{k} \frac{C_{21}}{A_{21}}, \quad (160)$$

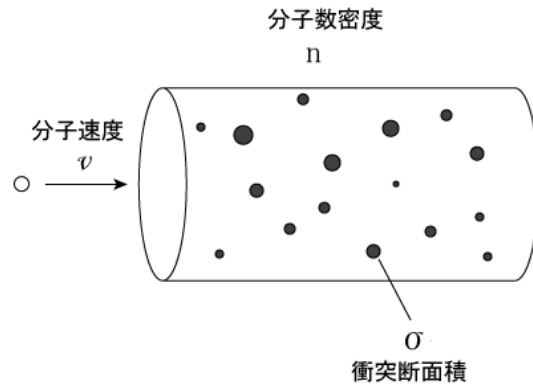


図 21: 分子衝突の模式図

これを用いて励起温度の式を整理すると、

$$T_{\text{ex}} = \frac{T_0 + T_b}{T_0/T_k + 1} = T_k \left(\frac{T_0 + T_b}{T_0 + T_k} \right) \quad (161)$$

この式より、 $T_0 \gg T_k, T_b$ のとき $T_{\text{ex}} \approx T_k$ となり、局所熱平衡状態となる。一方、 $T_0 \ll T_k, T_b$ のとき $T_{\text{ex}} \approx T_b$ となる。これは、放射平衡状態と呼ばれ、これは外部からの放射（輝度温度 T_b ）によって準位が励起されることを表す。この場合、放射輸送の式に $T_{\text{ex}} \approx T_b$ を代入してみればわかるように、輝線は背景放射にまぎれて観測することができない。

18.3 臨界密度

式 (160) より T_0 は C_{21}/A_{21} に比例する。一方、分子の衝突による遷移確率 C_{21} は分子密度 n 、分子速度 v 、衝突断面積 σ を用いると、

$$C_{21} = n \langle \sigma v \rangle \quad (162)$$

と表すことができる。

特に $C_{21} = A_{21}$ となる密度 $n = n_{\text{crit}}$ を臨界密度という。すなわち、

$$n_{\text{crit}} \equiv \frac{A_{21}}{\langle \sigma v \rangle}, \quad (163)$$

局所熱平衡状態が達成されるためには、 $n \gg n_{\text{crit}}$ が必要である。臨界密度 n_{crit} は分子によって異なるので、分子ごとにトレースできる領域がことなる。すなわち多種類の分子輝線の観測から、ガスの密度や温度などの物理状況を診断することが可能である。

星間原子および分子の臨界密度

遷移	周波数	ガス温度	臨界密度 n_{crit}
HI (F=1-0)	1420 MHz	100 K	$1 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-3}$
CO (J=1-0)	115 GHz	100 K	$3 \times 10^3 \text{ cm}^{-3}$
CS (J=1-0)	49 GHz	100 K	$1 \times 10^5 \text{ cm}^{-3}$
HCO ⁺ (J=1-0)	89 GHz	30 K	$2 \times 10^5 \text{ cm}^{-3}$
HCN (J=1-0)	89 GHz	30 K	$4 \times 10^6 \text{ cm}^{-3}$

18.4 臨界密度の例

臨界密度の例を以下の表にまとめる。中性水素の臨界密度は $n_{\text{crit}} \approx 10^{-5} \text{ cm}^{-3}$ 程度であり、一方、星間空間の中性水素密度は $n_{\text{HI}} \sim 1 \text{ cm}^{-3}$ だから、LTE は問題なく成立する。一方、分子輝線の代表格である CO は、臨界密度が $\sim 10^3 \text{ cm}^{-3}$ と中性水素に比べて大きい。従って、CO では星間中性水素ガスで観測される領域よりも 1 千倍以上密度の高い領域が観測されることになる。実際、CO は星形成を行っている分子雲で良く観測される。その他のより臨界密度の高い分子は、分子雲コアなど、まさに星が誕生しようとしている現場を観測するのに使われる。

18.5 分子輝線観測のメリット

分子輝線観測のメリットを以下に挙げる。

- 星形成領域など、他の波長では見えない低温度領域を観測できる。
- ドップラー効果からガスの視線速度が得られる。
- 異なる分子輝線を使い分けることで、密度や温度が異なる領域をトレースできる。
- 分子そのものの研究も可能（星間空間での化学反応など）

19 メーザー放射

19.1 励起温度と輻射輝度の関係

局所熱平衡状態 (LTE) が成り立たない場合、ある 2 つの準位分布について

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_{\text{ex}}}\right), \quad (164)$$

で定義される温度 T_{ex} を励起温度という。励起温度は LTE の場合、すべての準位に対して等しく、系の温度（熱運動の温度） T に等しい。一方、LTE でない場合、励起温度 T_{ex} は準位ごとに異なる値を取り得る。

LTE の場合の輻射輸送の式との比較から、励起温度 T_{ex} のガス中を伝播したときの輝度温度は、

$$T_b = T_b(0)e^{-\tau_\nu} + T_{\text{ex}}(1 - e^{-\tau_\nu}), \quad (165)$$

と書ける。

以下に、2つの重要なケースについて述べる。

- 放射平衡 ($T_{\text{ex}} = T_b(0)$) の時、常に $T_b = T_b(0)$ 。この時、輝線は背景放射にまぎれて観測できない。
- 局所熱平衡 (LTE, $T_{\text{ex}} = T_k$) で、かつ光学的厚みが大きい $\tau_\nu \gg 1$ の時、 $T_b = T_k$ 。通常の輝線の場合 $T_k = T_b(0)$ 、このケースが、熱的放射の最大輝度を与える。すなわち、熱的放射を観測する限り、観測される輝度温度は天体の LTE 温度を超えることはない。

19.2 反転分布と負の温度

式 (164) で定義される励起温度 T_{ex} は、 $g_1 n_2 / g_2 n_1 > 1$ のとき、負の値を取る。このような状態（上の準位により多くの粒子が分布している状態）を「反転分布」と呼ぶ。このような特殊な状態になったときにメーザー放射が起こる。

19.3 吸収係数と光学的厚み

励起温度が T_{ex} の時、輻射輸送方程式における吸収係数 κ_ν は、アインシュタイン係数を用いて以下のように書ける。

$$\kappa_\nu = \frac{c^2 g_2 n_1}{8\pi \nu^2 g_1} \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_{\text{ex}}}\right) \right] A_{21} \phi(\nu') \quad (166)$$

また、光学的厚み τ_ν と吸収係数 κ_ν の関係は、

$$\tau_\nu = \int \kappa_\nu ds, \quad (167)$$

である。もし、励起温度が負の場合、 $\exp(-h\nu/kT_{\text{ex}}) > 1$ より、 κ_ν および τ_ν が負になることが、上の式から容易にわかる。

19.4 メーザー

励起温度が負の場合、 τ_ν が負になり、この時の輻射輸送の式は、

$$T_b = T_b(0)e^{|\tau|} + |T_{\text{ex}}|(e^{|\tau|} - 1), \quad (168)$$

となる。このとき、輝度温度は $e^{|\tau|}$ の項によって伝播とともに指数関数的に増幅され、極めて輝度温度の高い放射が観測される。このような現象をメーザー (MASER: Microwave Amplification of Stimulated Emission of Radiation) という。メーザーはレーザーの電波版であるともいえる (LASER: Light Amplification of ...)。歴史的には、1954 年に C. タウンズによって人工的なメーザーが発明され、その後、星間空間の放射から自然界のメーザー現象が多数見つかっている。

19.5 レート方程式

反転分布を形成するために必要な条件を、簡単化した 3 準位モデルで考える。各準位間の遷移確率を γ_{21} , γ_{32} , γ_{31} というように表し、また、準位 1 (最低エネルギー) から準位 3 (最高エネルギー) へのくみ上げ効率 (pumping rate) を Γ で表すとする。このとき、各準位にある粒子数 (n_1 , n_2 , n_3) の変化率は、

$$\frac{dn_1}{dt} = \gamma_{21}n_2 - \Gamma n_1, \quad (169)$$

$$\frac{dn_2}{dt} = \gamma_{32}n_3 - \gamma_{21}n_2, \quad (170)$$

$$\frac{dn_3}{dt} = \Gamma n_1 - (\gamma_{31} + \gamma_{32})n_3, \quad (171)$$

と書ける。これをレート方程式という。

定常状態では $dn_1/dt = dn_2/dt = dn_3/dt = 0$ となるから、準位 3 に関する式から

$$n_3 = \frac{\Gamma}{\gamma_{31} + \gamma_{32}} n_1, \quad (172)$$

また、準位 2 に関する式と上の式より、

$$n_2 = \frac{\gamma_{32}}{\gamma_{21}} n_3 = \left(\frac{\Gamma}{\gamma_{31} + \gamma_{32}} \times \frac{\gamma_{32}}{\gamma_{21}} \right) n_1, \quad (173)$$

となる。簡単のために各準位の縮退度を $g_1 = g_2 = g_3 = 1$ とすれば、反転分布は $n_2/n_1 > 1$ で達成されるから、その条件として

$$\frac{\Gamma}{\gamma_{31} + \gamma_{32}} \times \frac{\gamma_{32}}{\gamma_{21}} > 1, \quad (174)$$

となり、これを整理して、

$$\Gamma > \gamma_{21} \left(1 + \frac{\gamma_{31}}{\gamma_{32}} \right), \quad (175)$$

となる。この式が満たされるためには、以下の条件が必要である。

- Γ が大きい。すなわち、くみ上げ効率が高い。
- γ_{21} が小さい。すなわち、準位 2 の滞留時間が長い。
- $\gamma_{32} < \gamma_{31}$ 。すなわち、準位 2 への遷移確率の方が準位 1 に比べて大きい。

このような条件が満たされ、式 (175) が成立すると、反転分布となってレーザー現象が観測される。

20 宇宙レーザーの特徴

20.1 レーザー放射をする領域

レーザー現象は反転分布という極めて特異な状況下で起こるので、レーザーが観測される領域は極めて限られたものとなる。これまでにレーザーが観測されているのは、以下の 3 つのケースである。

- 星形成領域：主に、原始星アウトフローが周囲のガスとぶつかって発生するショック領域でレーザーが見える。また、原始星周囲の降着円盤からもレーザーが出る可能性が指摘されているが、今のところ確証はない。
- 晩期型星：AGB 型星から質量放出によって出された星周ガスでレーザーが観測される。
- AGN 周辺領域：AGN 周囲の降着円盤やジェットに付随してレーザーが観測される。

20.2 レーザーを起こす輝線

以下に、これまでにレーザーが観測されている分子の中で、輝度が明るい代表的なものをあげる。

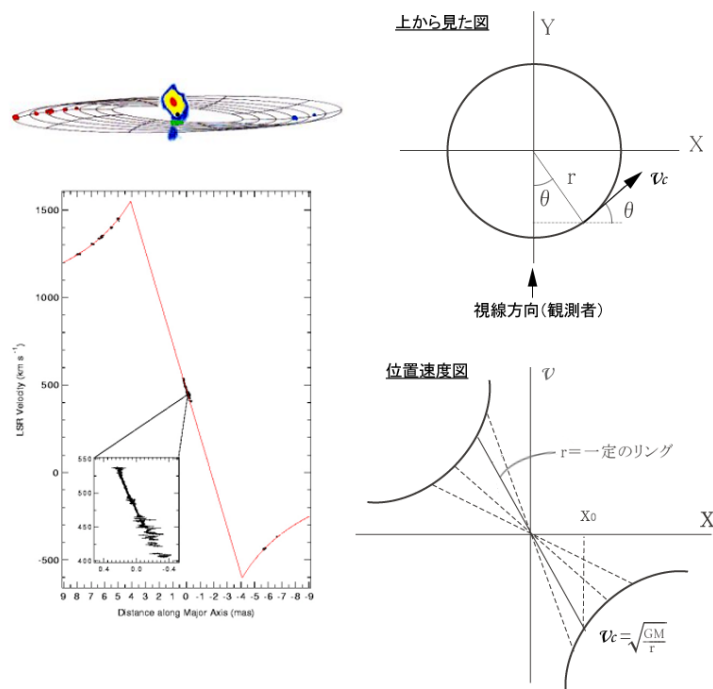


図 22: 回転円盤の位置速度図の模式図と NCC4258 の観測例

主なメーザー輝線				
分子	周波数	典型低なガス温度	ガスの数密度	天体種族
OH	1.6 GHz	~ 100 K	10^5 cm^{-3}	AGB, SFR, AGN
CH ₃ OH	6.7 GHz	~ 200 K	10^5 cm^{-3}	SFR
H ₂ O	22 GHz	~ 500 K	10^9 cm^{-3}	AGB, SFR, AGN
SiO	43 GHz	~ 1500 K	10^9 cm^{-3}	AGB

AGN : Active Galactic Nuclei (活動銀河中心核) AGB : Asymptotic Giant Branch Star (漸近巨星分枝) SFR : Star Forming Region (星形成領域)

電波計測技術編

21 天体強度の計測方法

21.1 フラックスと天体のアンテナ温度

電気回路において温度 T を持つ任意の抵抗 R が発する雑音の電力は $P = kT\Delta\nu$ と表されるので(ナイキスト雑音)、アンテナも同様な電気回路と見なして「アンテナ温度」をアンテナで受信する電力 P_{ant} を用いて次のように定義する。

$$P_{\text{ant}} \equiv kT_a\Delta\nu, \quad (176)$$

一方、フラックス F_ν の天体を観測した時のアンテナの受信電力 P_{ant} は

$$P_{\text{ant}} = \frac{1}{2}A_e F_\nu \Delta\nu, \quad (177)$$

である。ここで $1/2$ は一偏波のみを受信していることを考慮している(電磁波は横波なので2つの偏波成分がある)。また、 A_e はアンテナの実効的な開口面積を表す。開口能率を η として、

$$A_e = \eta A \quad (178)$$

とも表すことができる。ここで A はアンテナの開口面積であり、直径 D の円形のパラボラアンテナでは $A = \pi(D/2)^2$ である。

これより、アンテナ温度 T_a は

$$kT_a = \frac{1}{2}A_e F_\nu, \quad (179)$$

となる。この式が天体のフラックスと観測されるアンテナ温度を関係付ける基本的な式である。なお、電波天文学において、フラックスをジャンスキー(Jansky、Jy)という電波天文学の開拓者にちなんだ単位で表すことが多い。1 Jy = 10^{-26} W m⁻² Hz⁻¹ である。

21.2 広がった天体の場合

天体が一様な輝度 I を持って広がっている場合を考える。天体の大きさがビームサイズよりも小さい場合は、

$$F_\nu \approx I\Omega_{\text{src}}, \quad (180)$$

と書ける。ここで、 Ω_{src} は天体の大きさ(立体角)である。また、天体の大きさがビームサイズよりも大きい場合は、

$$F_\nu \approx I\Omega_{\text{beam}}, \quad (181)$$

と書ける。ここで、 Ω_{beam} はビーム有効立体角である。

21.3 アンテナの温度と輝度温度の関係

天体の大きさがビームサイズより大きい場合、上式から、

$$kT_a = \frac{1}{2} A_e I \Omega_{beam}, \quad (182)$$

と書ける。

レイリー・ジーンズ近似を用いて定義される輝度温度 T_b を用いると

$$I = \frac{2k}{\lambda^2} T_b, \quad (183)$$

より、

$$kT_a = A_e \frac{k}{\lambda^2} T_b \Omega_{beam}. \quad (184)$$

上式で、一般のアンテナで成り立つ以下の関係式

$$\frac{A_e \Omega_{beam}}{\lambda^2} = 1 \quad (185)$$

を用いると、最終的に

$$T_a = T_b, \quad (186)$$

を得る。すなわち、ビームサイズよりも十分大きな一様天体を観測した場合のアンテナ温度は、天体の輝度温度に等しい。なお、式 (185) の厳密な導出はアンテナ工学の専門書に譲るが、簡略化して考えると、アンテナの面積 $A_e \approx D^2$ 、ビーム立体角 $\Omega_{beam} \approx (\lambda/D)^2$ とすれば、確かに $A_e \Omega_{beam} / \lambda^2 \approx 1$ となる。

21.4 システム温度

実際の観測では、天体以外にも大気や宇宙背景放射などにより実際に計測されるアンテナ温度は増加する。そこで、実際に観測されるアンテナ温度 T_A は、以下のように表すことができる。

$$T_A = T_a e^{-\tau} + T_{sky} (1 - e^{-\tau}). \quad (187)$$

ここで、 T_a は天体のアンテナ温度、 T_{sky} は大気放射の温度（黒体放射なので実際の気温と等しいである。また、 τ は大気の光学的厚みを表しており、右辺の第1項目と2項目は輻射輸送の式に従い天体放射の減衰と吸収体からの再放射を表している。ここで、 τ は平行平板大気を仮定すれば天頂方向の光学的厚み τ_0 を用いて次のように書ける。

$$\tau = \tau_0 \sec Z. \quad (188)$$

ここで、 Z は天頂距離である。

実際のアンテナ温度は上式 (187) で与えられるが、このアンテナ温度によって発生する電力 P を直接検出するのは容易ではない。例えば、常温 ($T=300$ K) の一様黒体を観測したとして、帯域幅 $\Delta\nu$ を 1 GHz 取ったとしても、アンテナの出力電力は、 $P = k T \Delta\nu \approx 4 \times 10^{-12}$ W であり、我々が日常使う電力に比べてはるかに小さい。通常電気回路で扱いやすい電力は mW 程度であり、アンテナからの電力を定量的に計測するためには、アンテナからの出力を大幅に増幅する必要がある。

この増幅を行う装置が受信機であり、電波天文学ではアンテナ本体と並んで非常に重要な装置である。理想的な受信機は元の信号を増幅するだけで一切雑音を付加させないが、実際の受信機では受信機雑音 T_{RX} が新たに付加され、これが観測感度を低下させる。受信機雑音を考慮した際に得られる雑音温度 T_{obs} は、

$$T_{obs} = T_a e^{-\tau} + T_{sky}(1 - e^{-\tau}) + T_{RX}. \quad (189)$$

特に、天体のない blank sky を観測した場合のこの雑音温度をシステム雑音温度といい、 T_{sys} と表す。すなわち、

$$T_{sys} = T_{sky}(1 - e^{-\tau}) + T_{RX}, \quad (190)$$

$$T_{obs} = T_a e^{-\tau} + T_{sys}, \quad (191)$$

と書ける。システム雑音温度は観測装置自身（大気も含めて）が発生させている雑音を表し、小さいほど装置としての性能が良い。

21.5 ON-OFF スイッチング

通常、天体からの電波は弱く、天体のアンテナ温度 T_a はシステム温度に比べて小さい ($T_a \ll T_{sys}$) ので、1 回の電力計測から直接に天体の電波強度を求めるのは難しく、天体に向けた状態 (On-source) と天球面上すこし離れた場所に向けた状態 (Off-source) との差分から天体強度を測定する。このような観測手法をオン・オフスイッチングという。すなわち、オン、オフ時の受信機出力電力をそれぞれ

$$P_{ON} = G_{RX} k (T_a e^{-\tau} + T_{sys}) \Delta\nu \quad (192)$$

$$P_{OFF} = G_{RX} k T_{sys} \Delta\nu \quad (193)$$

とする。ここで G は受信機の増幅率（ゲイン）である。両者の差を P_{OFF} で規格化すると、

$$\frac{P_{ON} - P_{OFF}}{P_{OFF}} = \frac{T_a e^{-\tau}}{T_{sys}}, \quad (194)$$

と求まる。このような計測に加えて、別途システム雑音温度 T_{sys} と大気吸収係数 τ を求めれば、天体のアンテナ温度 T_a を決定することができる。シス

システム雑音温度 T_{sys} を別に計測するには、温度が既知の雑音を注入し、温度変化を計測することで行われるのが一般的である。また、大気吸収係数 τ は天頂角 Z を変えながらシステム温度の変化を調べる”sec Z ”法が良く使われる。

21.6 R-Sky 法を用いた温度較正

cm 波や mm 波帯で良く利用される温度較正法に R-Sky 法がある。R-Sky 法は、blank sky のパワーの観測と温度が既知の黒体のパワーの観測のみからシステム温度を計測でき、 τ の計測が不要な簡便な温度較正方法である。

R-Sky 法で求められるシステム雑音温度 T_{sys}^* は以下の式で定義される。

$$T_{\text{sys}}^* = T_{\text{sys}} e^{\tau} \quad (195)$$

blank sky と黒体（温度は室温）を観測したときの受信パワー P_{sky} および P_{R} は、受信機ゲインを G とし次のように書ける。

$$P_{\text{sky}} = Gk [T_{\text{RX}} + T_{\text{sky}}(1 - e^{-\tau})] \Delta\nu \quad (196)$$

$$P_{\text{R}} = Gk (T_{\text{RX}} + T_{\text{room}}) \Delta\nu. \quad (197)$$

ここで T_{RX} は受信機雑音温度であり、 T_{sky} および T_{room} はそれぞれ外気温と室温である。2 つパワーの比 y をとると、

$$y = \frac{P_{\text{R}}}{P_{\text{sky}}} = \frac{T_{\text{RX}} + T_{\text{room}}}{T_{\text{RX}} + T_{\text{sky}}(1 - e^{-\tau})}, \quad (198)$$

となる。ここで、外気温度と黒体の温度（室温）が等しいと仮定し、上式に T_{room} に T_{sky} を代入して整理すると、

$$y = 1 + \frac{T_{\text{sky}} e^{-\tau}}{T_{\text{RX}} + T_{\text{sky}}(1 - e^{-\tau})}, \quad (199)$$

を得る。これに T_{sys}^* の定義式を代入して整理すると、最終的に

$$T_{\text{sys}}^* = \frac{T_{\text{sky}}}{y - 1}, \quad (200)$$

となり、R-Sky 測定時の受信パワー比 y と外気音 T_{sky} の測定から T_{sys}^* を決定することができる。なお、受信パワー比はデシベル単位であわらすことが多く、その値を Y dB とすれば、 T_{sys}^* は

$$T_{\text{sys}}^* = \frac{T_{\text{sky}}}{10^{Y/10} - 1}, \quad (201)$$

とも表せる。

このように求められた T_{sys}^* を用いれば、式 (194) より、

$$T_a = \left(\frac{P_{\text{ON}} - P_{\text{OFF}}}{P_{\text{OFF}}} \right) T_{\text{sys}}^*, \quad (202)$$

と得ることができる。すなわち τ を計測しないで T_a を得ることがわかる。このように T_{sys}^* を用いて得られた T_a を T_a^* と書くこともある。

22 電波干渉計の基礎方程式

干渉計の最も簡単な例として、2つの電波望遠鏡からなる2素子干渉計を考える。2つの観測局である電波天体を同時にしたとき、電波の伝播速度が有限(光速 c)であるために、同一波面の電波が観測局1と2に到達する時刻に差が生じる。この到達時間差を遅延時間という。遅延時間は、アンテナや受信機内部での機械的遅延および大気や電離層による伝播遅延がない理想的な状態では、天体の方向ベクトル \vec{s} と基線ベクトル \vec{B} の幾何学的な関係のみから決まり、これを特に幾何学的遅延時間 (τ_g) と呼ぶ。図 23 からわかるように幾何学的遅延時間は、

$$\tau_g = \frac{\vec{s} \cdot \vec{B}}{c}, \quad (203)$$

という簡単な関係式で表される。これが干渉計の基本方程式であり、遅延時間は干渉計の最も基本的な観測量である。

式 (203) において基線ベクトル \vec{B} が既知の場合、任意の星について τ_g を計測してやると、その天体の方向ベクトル \vec{s} を決定することができる。もちろん、方向ベクトル \vec{s} はベクトル量であるので、1回の τ_g の計測のみから \vec{s} を一意に決定することはできない。しかし、基線ベクトル \vec{B} は地球回転とともに時々刻々変化するので、時間とともに遅延時間 τ_g がどのように変化するかを観測すれば、式 (203) に従って天体位置 \vec{s} を決めることができる。また、同様に、天体位置 \vec{s} が既知の場合は、遅延時間 τ_g の観測から基線ベクトル \vec{B} を求めることができる。このように、天体位置を求める位置天文観測と、基線長を求める測地観測とは、いわば表裏一体の関係にあることがわかる。

23 相互相関関数

干渉計で遅延時間を計測するには、複数の局で受信した信号を局同士で掛け合わせ、相互相関を取る必要がある。この処理をするのが相関器であり、干渉計観測に不可欠な装置である。例として、図 23 のような2素子干渉計において観測された電波の相互相関を以下で考える。

簡単のため天体は点源であるとし、天体からの電波は周波数 ν_0 の単色平面波とする。この時、観測局1、2で受信される天体電波(電圧)はそれぞれ、

$$V_1(t) = V_1 \cos(2\pi\nu_0 t + \phi), \quad (204)$$

$$V_2(t) = V_2 \cos(2\pi\nu_0(t - \tau_g) + \phi), \quad (205)$$

と書ける。ここで、 τ_g は幾何学的遅延時間である。このとき、相関器で得られる相互相関関数 $R_{12}(\tau)$ は次のように定義される。

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V_1(t) V_2(t - \tau) dt \quad (206)$$

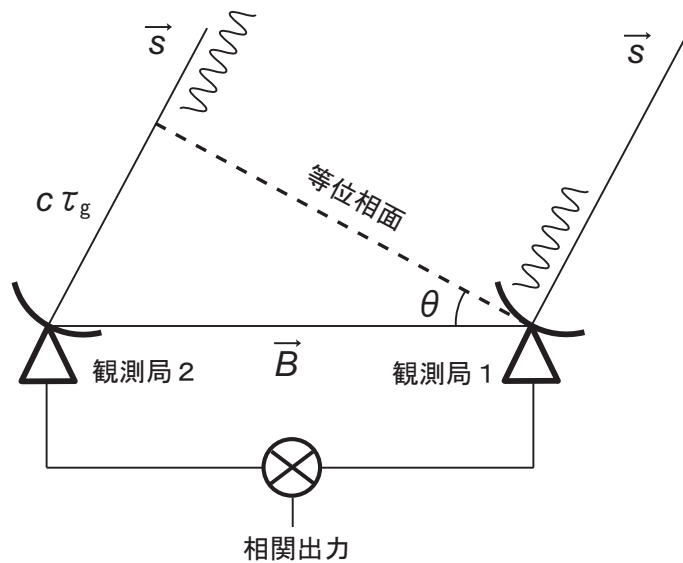


図 23: 2 素子干渉計における基線と幾何学的遅延時間の関係の模式図。

相互相関関数は局 1 での受信電圧と局 2 での受信電圧を、時間を τ だけずらしながら掛け合わせることを意味している。

式 (204)、(205) を式 (206) 代入して積分すると、 t に関する振動成分は消えて、最終的に、

$$R_{12}(\tau) = \frac{V_1 V_2}{2} \cos 2\pi\nu_0(\tau + \tau_g), \quad (207)$$

という式が得られる。これが単色平面波に対する 2 素子干渉計の相関出力を表す式である。式 (207) からわかるように、相互相関の振幅は電波強度に依存し、位相は幾何学的遅延時間 (τ_g) に依存している。従って、干渉計の相関出力から天体の強度や位置の情報を取り出すことができる。他方、相互相関関数は波の初期位相 ϕ には依存しないことが式 (207) からわかる。

式 (206) で τ を $(\tau - 1/4\nu_0)$ と置き換えた関数を I_{12} とする。このとき式 (207) の \cos 関数内の位相が 4 分の 1 周遅れることから、

$$I_{12}(\tau) = R_{12}(\tau - 1/4\nu_0) = \frac{V_1 V_2}{2} \sin 2\pi\nu_0(\tau + \tau_g), \quad (208)$$

となる。今後の議論のため、上記の R_{12} を実部、 I_{12} を虚部とするような相互相関関数 C_{12} を導入する。すなわち

$$C_{12}(\tau) = R_{12} + iI_{12} = \frac{V_1 V_2}{2} e^{2\pi i\nu_0(\tau + \tau_g)}. \quad (209)$$

このように複素数で記述された相互相関を複素相互相関関数と呼び、このような処理を行う相関器を複素相関器という。複素相互相関関数 C_{12} においても振幅が天体強度の情報を、位相が遅延時間の情報を持っていることは実相関関数 R_{12} の場合と代わらない。

24 自己相関関数

上で述べた相互相関関数は局1と局2の信号を掛け合わせたものだが、これと同様に局1あるいは局2の信号をそれ自身と掛け合わせた相関関数を定義することが可能であり、これを自己相関関数という。例えば自己相関関数の R_{11} は、

$$R_{11}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V_1(t) V_1(t - \tau) dt \quad (210)$$

というようになる。単色正弦波の場合、相互相関と同様に

$$R_{11}(\tau) = \frac{V_1^2}{2} \cos 2\pi\nu_0\tau, \quad (211)$$

$$C_{11}(\tau) = \frac{V_1^2}{2} e^{2\pi i\nu_0\tau}, \quad (212)$$

である。なお、ここで自己相関の場合、掛け合わせる信号が同一で遅延時間がないので $\tau_g = 0$ である。

25 パワースペクトル

相関関数をフーリエ変換したものをパワースペクトルという。パワースペクトルは、どの周波数でどの程度の電力を表すかを表す周波数領域の関数である。フーリエ変換および逆フーリエ変換は以下で定義される。

$$X(\nu) = \int x(t) e^{-2\pi i\nu t} dt, \quad (213)$$

$$x(t) = \int X(\nu) e^{2\pi i\nu t} d\nu, \quad (214)$$

ちなみに、フーリエ変換は物理的に同じ現象を時間領域の関数から周波数領域への関数へ（あるいはその逆へ）変換することを意味しており、相関関数とパワースペクトルも、物理的に同じ現象を時間領域・周波数領域で表した対である。

25.1 単色波の場合

単色波の場合、複素相関関数 $C_{12}(\tau)$ をフーリエ変換すると。

$$S(\nu) = \int C_{12}(\tau) e^{-2\pi i\nu\tau} d\tau = \frac{V_1 V_2}{2} \delta(\nu - \nu_0) e^{2\pi i\nu_0\tau_g} \quad (215)$$

である。なお、ここで Dirac のデルタ関数 (Dirac's delta function) のフーリエ積分表示、

$$\delta(\nu) = \int e^{2\pi i\nu t} dt, \quad (216)$$

を用いた。式 (215) は、最初に仮定したとおり周波数 ν_0 の輝線スペクトルになっており、その振幅は電圧の 2 乗なので電力に比例する。従って、相関関数のフーリエ変換が確かにパワースペクトルになっていることがわかる。

25.2 連続波源の場合

上記の議論では周波数 ν_0 の単色波を考えたが、連続波スペクトルの場合、上の式を ν_0 について周波数方向に積分したものである。このときのパワースペクトルは

$$S(\nu) = F_\nu e^{2\pi i \nu \tau_g} \quad (217)$$

と表すことができる。 F_ν は周波数方向のフラックス分布を表す実関数で、連続波源の場合、通常は観測される帯域幅内でフラックスは一定と考えてよく $F_\nu = \text{const.}$ である。このときパワースペクトルの位相 ϕ は周波数 ν の関数として連続的に変化し、

$$\phi = 2\pi\nu\tau_g, \quad (218)$$

である。

26 遅延追尾

相互相関を得るには式 (206) で時間積分をする間 τ_g が一定でなければならない。しかし、実際の干渉計では（特に基線長の大きい VLBI では）地球回転の効果により τ_g は時々刻々変化する。地球回転の角速度 ω_\oplus は

$$\omega_\oplus = \frac{2\pi}{86400 \text{ sec}} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ radian/sec} \quad (219)$$

であり、基線長は例えば VERA の最長基線の $|\vec{B}| = 2300 \text{ km}$ とすると、基線長の変化率 $\dot{\vec{B}}$ は

$$\dot{\vec{B}} \approx |\vec{B}|\omega_\oplus = 167 \text{ m/sec} \quad (220)$$

となる。すなわち 1 秒間に幾何学的遅延時間は 100 m 以上変化する。一方、

$$\phi = 2\pi\nu\tau_g = 2\pi\frac{\vec{B} \cdot \vec{s}}{\lambda} \quad (221)$$

より、パワースペクトルの位相の変化率を回転数で表した値

$$\frac{\dot{\phi}}{2\pi} = \frac{\dot{\vec{B}} \cdot \vec{s}}{\lambda} \quad (222)$$

は、例えば VERA で 22GHz 帯の観測の場合 $\lambda = 1.3 \text{ cm}$ より、

$$\frac{\dot{\phi}}{2\pi} \approx \frac{|\dot{\vec{B}}|\omega_\oplus}{\lambda} = 1.2 \times 10^4 \text{ Hz} \quad (223)$$

となる。すなわち、今考えている例では相関関数を計算するために仮に1秒間積分したとすると、その間に τ_g の変化によって位相が1万2000回も余計に回転する。これでは正しく積分することが不可能であり(例えば、振幅1でぐるぐると回転する複素ベクトルをそのまま時間平均すると0になる)。このため相関関数を得るには位相回転を止めるために幾何学的遅延時間 τ_g を打ち消すような補正項 $-\tau_0$ を加える必要がある。これは、あらかじめ判っている天体の位置を基に幾何学的遅延時間を予想したものであり、この補正を遅延追尾といい、 τ_0 の計算に使われる天体の予想位置を追尾中心という。遅延追尾は、過去にはVLAなどの結合素子型干渉計では、伝送ケーブルの長さを調節することで行われてきたが、現在では計算機でデジタル的に補正する。遅延追尾を行った場合のパワースペクトルは

$$S(\nu) = F_\nu e^{2\pi i\nu(\tau_g - \tau_0)} \quad (224)$$

となる。すなわち、遅延追尾が完璧な場合、 $\tau_g = \tau_0$ より位相項は0となる。

27 UVW 座標

地球から追尾中心に向かう方向を W 成分とし、それに直交する成分のうち東向きに U 、北向きに V をとるような直交3次元座標系を導入し、基線ベクトルを

$$\vec{B} = (U, V, W) \quad (225)$$

と表すとする。この座標系では、追尾中心にある天体の方向ベクトルは

$$\vec{s}_0 = (0, 0, 1) \quad (226)$$

である。また、追尾中心からわずかにずれた天体の方向ベクトルについては、赤道座標系上 (α, δ) での位置オフセットを $(\Delta\alpha \cos \delta, \Delta\delta) = (x, y)$ とすると、

$$\vec{s} = (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}) \quad (227)$$

と書ける。

このとき、追尾中心からずれたところに位置する点源のパワースペクトルの位相項 ϕ は、

$$\tau_g = \frac{\vec{B} \cdot \vec{s}}{c}, \quad \tau_0 = \frac{\vec{B} \cdot \vec{s}_0}{c}$$

の関係より、

$$\phi = 2\pi\nu(\tau_g - \tau_0) \approx 2\pi\nu(Ux + Vy)/c \quad (228)$$

とかける。ここで $x, y \ll 1$ より、 $\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \approx 1$ とした。

さらに、波長 $\lambda = c/\nu$ で規格化した $u \equiv U/\lambda$ 、 $v \equiv V/\lambda$ を用いると、

$$\phi = 2\pi(ux + vy), \quad (229)$$

と書くことができる。すなわち、位相項を天体位置オフセット量 x, y と UV 座標 u, v で表すことができる。 U, V は、天体から地球上の観測局を見たときに、その視線に垂直な面に地球上の観測局位置を投影したものであり、地球回転とともに時々刻々変化してゆく。 UV 面上を地球回転に伴って基線ベクトルが動くことで生じる軌跡を UV Coverage という。

28 像合成

前回までの議論では、天体が点源であることを仮定していたが、以下では天体が点源でなく構造を持っている状況を考える。

まず、天体の構造を点源の重ね合わせで表すとする。フラックスが F_i の点源が位置 (x_i, y_i) にあるとき、観測されるパワースペクトルはそれらの重ね合わせにより、

$$S(\nu) = \sum_i F_i e^{2\pi i(ux_i + vy_i)} \quad (230)$$

とかける。

あるいは、よりスムーズな輝度分布 $I_\nu(x, y)$ を考えると、フラックスと輝度の関係 $F(x, y) = I_\nu(x, y)dxdy$ を式 (230) に用いてパワースペクトルは

$$S(\nu) = \sum_i I_\nu(x_i, y_i) e^{2\pi i(ux_i + vy_i)} dx_i dy_i$$

より、総和を積分と置き換えて

$$S(\nu) = \iint I_\nu(x, y) e^{2\pi i(ux + vy)} dxdy \quad (231)$$

と書ける。すなわち、パワースペクトルは輝度分布 $I_\nu(x, y)$ の 2 次元フーリエ変換 ($x \rightarrow u, y \rightarrow v$) になっている。パワースペクトルを陽に u, v の関数として表したものを $(S_\nu(u, v))$ を特にビジビリティと呼ぶ。つまり、干渉計観測によって得られるビジビリティを以下のように逆フーリエ変換することで、天体の輝度分布を得ることができるのである。これが干渉計による像合成の基本原理である。すなわち、

$$I_\nu(x, y) = \iint S_\nu(u, v) e^{-2\pi i(ux + vy)} dudv \quad (232)$$

である。

以下に、相互相関関数、パワースペクトル/ビジビリティ、輝度分布の、フーリエ変換を通じた関係をまとめる。

$$C(\tau) \leftrightarrow S(\nu) = S_\nu(u, v) \leftrightarrow I_\nu(x, y)$$

$$(\tau \leftrightarrow \nu, (u, v) \leftrightarrow (x, y))$$

29 ビームパターン

仮に強度 1 の点源があったとして、それを干渉計で観測した場合どのように見えるかを考える。この場合、輝度分布は

$$I_\nu(x, y) = \delta(x)\delta(y) \quad (233)$$

で与えられる。これを 2 次元フーリエ変換すると、

$$S_\nu(u, v) = \iint I_\nu(x, y)e^{2\pi i(ux+vy)} dx dy = 1. \quad (234)$$

すなわち、強度 1 の点源を観測した場合のビジビリティはどの (u, v) 点でも振幅 1、位相項 0 である。つまり、点源の場合、干渉計の基線長によらずまったく同じパワーで観測される。

ところで、我々が観測でまず得る量は $S_\nu(u, v)$ であり、2 次元フーリエ変換を用いてこれを $I_\nu(x, y)$ に直して画像を得、それを天文学研究に利用する。ここで、フーリエ変換でビジビリティを輝度に変換する式

$$I_\nu(x, y) = \iint S_\nu(u, v)e^{-2\pi i(ux+vy)} dudv \quad (235)$$

は、暗黙のうちに積分区間を $-\infty < u < \infty$, $-\infty < v < \infty$ と仮定している。一方、実際の干渉計は有限の基線長を持つから、実際の干渉計観測でサンプルされる (u, v) 領域は有限であり、積分区間を有限にとることは現実には不可能である。

有限の (u, v) 領域が及ぼす観測への影響を見るために、以下で次元の問題を考える。天体は 1 次元の点源であるとして、輝度は x 成分、ビジビリティは u 成分のみを考え、 $-u_0 < u < u_0$ の有限区間を一様にサンプルした状況を考える。ここで $u_0 \equiv U_0/\lambda$ であり、 U_0 は最大基線長である。このとき、観測されるビジビリティは

$$S_\nu(u) = 1 \quad (-u_0 < u < u_0), \quad (236)$$

である。これを逆フーリエ変換して天体の輝度分布を求めると、

$$\begin{aligned} I_{\text{obs}}(x) &= \int_{-u_0}^{u_0} S_\nu(u)e^{-2\pi iux} du \\ &= \frac{1}{-2\pi ix} e^{-2\pi iux} \Big|_{-u_0}^{u_0} \\ &= \frac{\sin(2\pi u_0 x)}{\pi x}. \end{aligned} \quad (237)$$

これは sinc 関数 ($\text{sinc } x = \sin x/x$) の形をしている。 $x = 0$ の近傍で $I_{\text{obs}}(x) = 0$ となる最初の点は $x = 1/2u_0$ であり、点源を観測したときの広がり x_{beam} はこれを 2 倍して、

$$x_{\text{beam}} = \frac{1}{u_0} = \frac{\lambda}{U_0}, \quad (238)$$

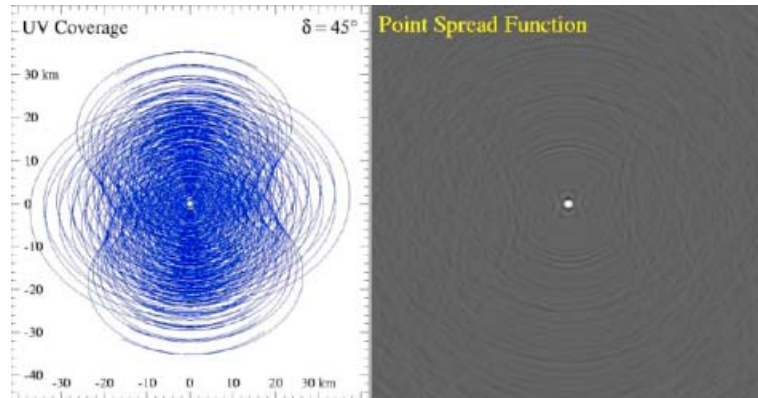


図 24: VLA の UV とビームパターンの例

となる。ここで λ は観測波長であり U_0 は U の最大値である。すなわち、干渉計で点源を観測するとその広がり λ/U_0 として観測される。これが干渉計のビームサイズ (分解能) である。なお、この式は単一鏡の分解能を表す式 $\theta_{\text{beam}} = \lambda/D$ に相当し、単一鏡の口径 D を最大基線長 U_0 で置き換えたものになっている。また、sinc 関数をプロットすればわかるように、 x が大きいところでも小さな山と谷が繰り返し存在し、これをサイドローブという。サイドローブがメインビームに対して大きいと、観測されたイメージから真のイメージを推定するのが難しくなる。サイドローブをできるだけ小さくするには UV カバレッジをできるだけ良くする他、観測された UV 点に重みをかけて、動的にビームを制御することもある。このように UV に対する重みをかける操作をテーパーという。例えば、テーパー関数としてガウス分布を考えると、ガウス分布のフーリエ変換はガウス分布になるので、サイドローブレベルをかなり押さえることができる。しかし、ガウス分布の重みをかけることを長基線のデータの重みが小さくなり、結果としてイメージの空間分解能は劣化する。

30 CLEAN

先にみたように、点源を観測した際に干渉計で得られる像がビームパターンであり、一般の天体を観測した際に得られる像は、真の輝度分布 I_ν にビームパターン I_{beam} を畳み込んだものになる。すなわち、

$$I_{\text{obs}}(x, y) = \iint I_\nu(x', y') I_{\text{beam}}(x - x', y - y') dx' dy'. \quad (239)$$

この、観測されたビジビリティをフーリエ変換して直接得られる像 $I_{\text{obs}}(x, y)$ をダーティーイメージと呼ぶ。

ダーティイメージから真の輝度分布 $I_\nu(x, y)$ を得るには、CLEAN といわれる方法が良く用いられる。CLEAN は、天体像を多数の点源 (CLEAN コンポネント) の集合で表すもので、そのイメージは

$$I_{\text{model}}(x, y) = \sum_i I_i(x_i, y_i) I_{\text{beam}}(x - x_i, y - y_i) \quad (240)$$

であり、このような点源の集合 $I_i(x_i, y_i)$ を、イメージ残差

$$I_{\text{resid}}(x, y) = I_{\text{obs}}(x, y) - I_{\text{model}}(x, y) \quad (241)$$

をなるべく小さくするように求める。実際には、ダーティイメージ上から、そのピークの 10% 程度の点源を、残差が収束するところまで繰り返し差し引き、差し引かれた点源が CLEAN コンポネントに、残った残差が I_{resid} になる。CLEAN を行った後の最終像は、CLEAN コンポネントにメインビームの広がりをかけ、さらにイメージの残差を加えたものとする。すなわち、

$$I_{\text{final}}(x, y) = \sum_i I_i(x_i, y_i) I_{\text{MB}}(x - x_i, y - y_i) + I_{\text{resid}}(x, y), \quad (242)$$

であり、ここで I_{MB} はメインビームの形状を現す関数である。

31 ミッシングフラックス

干渉計では、単一鏡に比べて高い分解能が達成されるのと引き換えに、広がった構造に対する感度が低下するという問題が発生する。これを干渉計によるミッシングフラックスと呼び、干渉計データの解釈に当たっては必ず気をつけなければならない重要な問題である。

極端な例として、一様輝度 I_0 で無限に広がった天体を考えると、

$$I_\nu(x, y) = I_0, \quad (243)$$

より、ビジビリティは

$$S_\nu(u, v) = \iint I_\nu(x, y) e^{2\pi i(ux+vy)} dx dy = I_0 \delta(u) \delta(v). \quad (244)$$

すなわち、観測されるビジビリティは原点 $(u, v) = (0, 0)$ 以外ではすべて 0 となる。これは、この天体を干渉計で観測しても、天体がまったく無いブラックスカイを観測した場合と同じように見えることを意味する。つまり、一様輝度で無限に広がる構造は、単一鏡 ($(u, v) = (0, 0)$ に相当) 以外では観測できない。これは、一様輝度の天体の場合、各場所からの電波が場所ごとに異なる遅延時間 τ_g を持っているために、可干渉性を持った積分ができないことに起因している。有限の大きさをもった天体の場合でも、天体の大きさがビームサイズよりも大きくなると、干渉計で検出されるフラックスは真のフ

ラックスに対して著しく減少する。このようなミッシングフラックスをなるべく小さくするには、1) 短い基線を加えて UV カバレッジを良くすることに加え、2) 単一鏡で全フラックスを測定することも必要である。ALMA 計画ではこの目的のために、日本が ACA (Atacama Compact Array) を分担している。ACA は 7m 鏡 12 台の干渉計で短い基線をサンプルするとともに、単一鏡専用の 12m 鏡 4 台でミッシングフラックスのないトータルフラックスを測定する。

32 位相遅延と群遅延

時間領域で記述された複素相互相関関数をフーリエ変換すると、周波数領域での相互相関スペクトル (クロスパワースペクトルとも呼ばれる) を得ることができる¹。例えば、式 (209) の単色平面波の相互相関関数から相互相関スペクトルを求めると、

$$\begin{aligned} S(\nu) &= \int C_{12} e^{-2\pi i \nu \tau} d\tau \\ &= \frac{V_1 V_2}{2} \delta(\nu_0 - \nu) e^{2\pi i \nu_0 \tau_g}, \end{aligned} \quad (245)$$

を得る。ここで δ はディラックのデルタ関数である。従って、単色平面波を観測した際の相互相関スペクトルは確かに $\nu = \nu_0$ の線スペクトルとなっている。また、その位相 ϕ は、

$$\phi = 2\pi \nu_0 \tau_g \quad (246)$$

で与えられる。すなわち、相互相関スペクトルの位相から幾何学的遅延時間の情報を引き出すことができる。上記の議論では周波数 ν_0 の単色平面波の場合を考えてきたが、連続波の場合でも同様の議論が成立し、任意の周波数に対して、 $\phi = 2\pi \nu \tau_g$ の関係がある。図 25 は連続波の場合の位相と周波数の関係を図示したものである。

相互相関スペクトルの位相から遅延時間を求める際には、通常、位相遅延 ϕ そのものに代わって、群遅延 τ_{grp} を用いる。群遅延 τ_{grp} は、周波数方向の位相傾斜によって記述される遅延量であり、以下のように定義される。

$$\tau_{\text{grp}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \phi}{\partial \nu_0} \quad (247)$$

位相遅延に代わり群遅延を使う理由は、観測位相は $(0, 2\pi)$ の区間内の値として得られ、真の位相に対して $2\pi N$ (N は整数値) の不定性を持つことにある。この状況は図 25 に示してあり、真の位相遅延量 ($\phi = 2\pi \nu \tau_g$ 、原点を通る直線) に対して、実際に観測される位相は $(0, 2\pi)$ の区間内をぐるぐる回転する量になってしまい、真の位相遅延は決定できない。また、位相遅延

¹自己相関関数 (時間領域) をフーリエ変換すると、自己相関スペクトル (周波数領域) が得られるのと同様である。詳しくはスペクトル解析の教科書を参照。

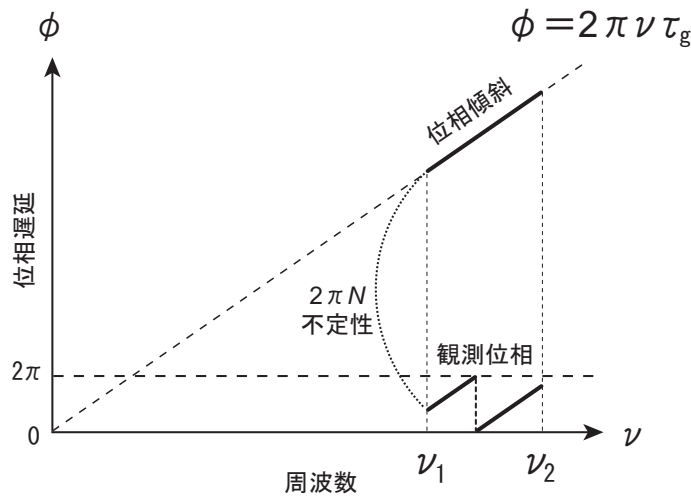


図 25: 有限帯域 (ν_1, ν_2) 間を観測したときの位相と周波数の関係図。

は群遅延に比べて遅延の測定精度が高いので²、大気や電離層等の伝播媒質の揺らぎやアンテナ内での機械遅延といった付加的な遅延に過敏に反応することも位相遅延の利用を難しくしている³。

群遅延を使って精度良く遅延時間を求めるには、帯域幅 $W (= \nu_2 - \nu_1)$ をできるだけ広く取る必要がある。帯域が広がれば受信する情報量が増えるので感度も向上し、群遅延の決定精度が大きく向上する。一方、取得する情報量が増えるために、データの転送速度や記録速度を高くする必要がでる。群遅延を用いた位置天文観測や測地観測では、これを回避するために、狭い帯域幅 (4 MHz ~ 8 MHz 程度) の帯域を適当な間隔をおきながら櫛状にならべ、総記録帯域幅は増やさないで群遅延決定の有効帯域を増やす工夫を行っている。このように、複数の帯域を合成して群遅延を精度良く決定する手法を、バンド幅合成 (Bandwidth Synthesis) という。

33 干渉計による天体位置計測

すでに述べたように、干渉計の重要な観測量として幾何学的遅延時間 τ_g がある。

$$\tau_g = \frac{\vec{B} \cdot \vec{s}}{c}. \quad (248)$$

²位相遅延と群遅延による遅延の決定精度の比は、オーダーとして観測周波数と帯域幅の比で与えられる。例えば観測周波数 22 GHz、帯域幅 256 MHz の場合、位相遅延による遅延決定精度は群遅延のそれに対して $22/0.256 \approx 86$ 倍にもなる。

³最近では、位相補償 VLBI 観測などで、位相遅延を観測量として位置天文計測を行う試みも行われており、将来の位置天文計測で主導的な役割を果たすと期待されている。

ここで、基線ベクトル \vec{B} が既知であれば、幾何学的遅延時間の観測（厳密には2つ以上の独立な計測が必要）から、天体の位置ベクトル \vec{s} を得ることができる。これが干渉計による位置計測の原理である。

具体的には、遅延追尾後のパワースペクトルが

$$S(\nu) = F_\nu e^{2\pi i(ux+vy)} \quad (249)$$

であり、位相項については

$$\phi = 2\pi\nu(\tau_g - \tau_0) = 2\pi(ux + vy) \quad (250)$$

の関係がある。この式は式 (248) を追尾中心に対する残差として具体的に書き下したものになる。従って、パワースペクトルの位相項から、追尾中心に対する残差位置 (x, y) を求めることができるのである。

34 遅延誤差と位置誤差

直接の観測量である幾何学的遅延時間に、ある観測誤差が付加されたときに、天体位置の誤差がどのように与えられるかを考える。遅延時間の測定誤差を $\Delta\tau_g$ とし、このときの見かけの天体位置ベクトルを \vec{s}^t とすると、

$$\tau_g + \Delta\tau_g = \frac{\vec{B} \cdot \vec{s}^t}{c}. \quad (251)$$

一方、誤差の無いときの遅延時間と天体位置の間には式 (248) の関係があるから、これらの式の差をとると

$$\Delta\tau_g = \frac{\vec{B} \cdot (\vec{s}^t - \vec{s})}{c} \equiv \frac{\vec{B} \cdot (\Delta\vec{s})}{c}, \quad (252)$$

ここで、 $\Delta\vec{s}$ は天体位置の変化量であり、これが天体位置の計測誤差を表す。この式から天体位置誤差を次元解析的にオーダー評価すると、

$$|\Delta s| \approx \frac{c\Delta\tau_g}{|B|} \quad (253)$$

すなわち、天体位置誤差は、遅延時間誤差を光路長に換算した量 $c\Delta\tau_g$ と基線長 $|B|$ の比で与えられることがわかる。

VERA の場合、最大基線長から $B \approx 2300$ km であり、目標精度を $|\Delta s| = 10$ μas ($= 5 \times 10^{-11}$ rad) とすると、要求される幾何学的遅延時間の測定精度は

$$\frac{c\Delta\tau_g}{|B|} \approx 5 \times 10^{-11}$$

より、光路長換算で

$$c\Delta\tau_g \sim 0.1 \text{ mm},$$

時間換算では

$$\Delta\tau_g \sim 0.3 \text{ psec},$$

となる。ここで、psec (ピコ秒) は 10^{-12} 秒を表す。このように、高精度で位置天文学的な観測を行なうためには、非常に高い精度での遅延の決定が不可欠になる。

35 大気の問題

上記のような高い精度を達成する上で、最大の困難となるのが大気の問題である。大気中の光速は真空中の光速 c よりも小さくなるので、その効果により付加遅延が発生する。大気による遅延は、乾燥大気成分と湿潤大気成分 (水蒸気) の遅延に大別され、以下のような特徴を持っている。

- 乾燥大気成分：1 気圧、水蒸気圧 0 状態で、光路長換算で約 2.3m 相当の遅延。ほぼ固定値である。
- 水蒸気成分：水蒸気分圧に大きく依存し、典型的には 0 から 30 cm 程度。激しく時間変動し、地表付近では数分間に数 cm 程度変動する。

上記のうち、特に水蒸気成分は激しく時間変動するので、位置天文観測を行なう上で致命的な誤差要因となる。

36 位相補償観測

水蒸気ゆらぎは数 cm のスケールを持つので、普通の地上観測では位置精度 $10 \mu\text{as}$ を達成するために必要な遅延精度 (光路長換算で 0.1 mm) を達成することはできない。この問題を回避するために考案された方法が近傍の 2 つの天体をほぼ同時に観測することで大気の揺らぎを打ち消す位相補償である。

いま、2 つの天体を同時に観測し、それぞれの天体について遅延時間を計測したとする (天体 1 を目標天体、天体 2 を基準天体とする)。このとき、それぞれの天体の観測には大気による付加遅延項が加わるので

$$\tau_{\text{obs},1} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{s}_1}{c} + \tau_{\text{atm}}(t) \quad (254)$$

$$\tau_{\text{obs},2} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{s}_2}{c} + \tau'_{\text{atm}}(t) \quad (255)$$

となる。このとき、2 つの天体が天球面上で十分近ければ (例えば数度以内)、大気の揺らぎはほぼ共通化される (すなわち $\tau_{\text{atm}}(t) \sim \tau'_{\text{atm}}(t)$)。よって、2 つの式の差分を取ると、

$$\Delta\tau_{21} \equiv \tau_{\text{obs},2} - \tau_{\text{obs},1} = \frac{\vec{B} \cdot (\vec{s}_2 - \vec{s}_1)}{c} \quad (256)$$

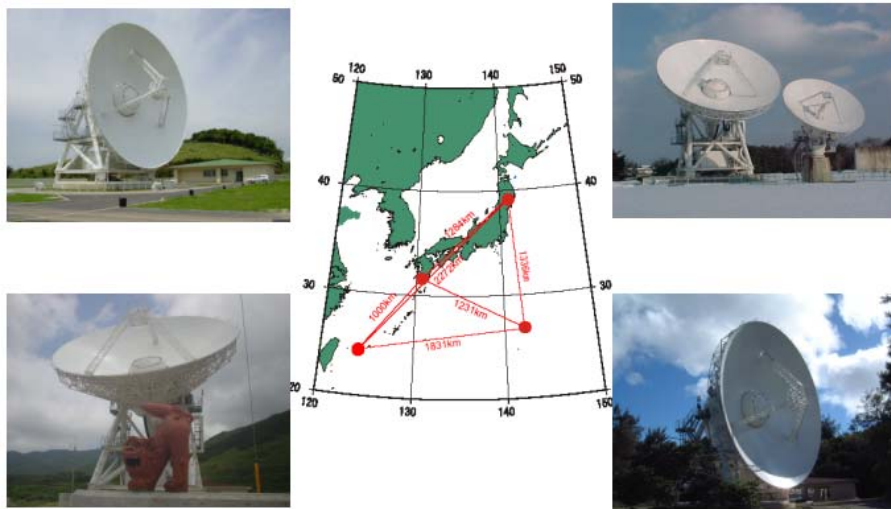


図 26: VERA の局配置図

すなわち、観測量 $\Delta\tau_{21}$ から、大気の揺らぎに影響されずに天体の相対位置 ($s_2 - s_1$) を計測することができる。

これを実現するには、VERAのように2ビームの同時受信システムを使用する。2ビームを持たない通常の電波望遠鏡の場合は、2天体を短いサイクルで交互に観測するスイッチング法という方法を代用する。スイッチングの場合、大気の揺らぎが変動する時間スケール(数分)よりも短い間に2天体間を切り替える必要がある。この場合、基準天体を観測するや、アンテナの駆動時間を考えると、目標天体に望遠鏡が向いている時間は全観測時間の25%程度となり、観測効率が悪い。

37 位置天文観測に要求される事項

すでに述べたように、VERAの目標精度 $10 \mu\text{as}$ は 5×10^{-11} rad に相当する。従って、遅延時間を元に天体位置を得るには、その換算に必要な計算もこれ以下の十分な精度(例えば 10^{-12} 程度)で行なわなければ行けない。具体的には、地球固定座標系で表された基線ベクトルを、天体位置を記述する赤道座標(例えば J2000 系)に正しく座標変換して、基線と遅延時間の関係を求める必要がある。そのためには一般相対論的效果までを正しく扱った、4次元的な座標変換が必要である。

以下に位置天文計測に際して考慮すべき事柄をまとめる。

座標回転

局位置は地球固定座標系で記述され、地球は天球面に対して回転運動するので、座標回転が必要である。

- 歳差：地球回転軸の天球に対する運動のうち、26000年周期の最大成分。
- 章動：地球回転軸の天球に対する運動のうち、歳差以外の高次項。
- 日周運動：地球の自転。厳密には24時間ではなく、大気との角運動量交換などの効果により変動している。
- 極運動：地球の自転軸が地面に対して運動する現象。1年程度の間極位置が10m程度地面に対して移動する。

相対論効果

地球は太陽の重力場中を公転している。公転速度は $v_{\oplus} \approx 30 \text{ km/s}$ であり、相対論的效果は $v_{\oplus}^2/c^2 \approx 10^{-8}$ のオーダーで効いてくる。これは必要精度 10^{-12} に比べれば桁違いに大きい効果である。また、地球重力場による時間の遅れ（地表の時計と無限遠の時計の歩度の差）は 7×10^{-10} であり、これも無視できない。これらを考慮した遅延時間の計算が要求される。

局位置変動

観測局位置も地球表面に対して静止してはおらず、位置は変動する。

- 潮汐による局位置変動：月や太陽の重力により1日スケールで最大30cm程度地殻が伸び縮みする。
- プレート運動：観測局位置は地殻の動きにより系統的に変化する。年間数cm程度

伝播効果

宇宙空間からの電波が観測局に到達するまでに、伝播媒質の影響を受ける。

- 大気：乾燥成分約2.3m、水蒸気成分は最大30cmで大きく変動。
- 電離層：高層大気のパラズマによる遅延の効果。周波数依存性（分散性）あり。

すなわち、電波干渉計による位置天文学は、プレート運動、地球回転から高層大気を含む地球物理学、さらには相対性理論に基づく座標変換など様々な学問に支えられて成立している、総合科学である。