

宇宙科学II (電波天文学) 第5回

黒体放射
&
ビッグバン宇宙

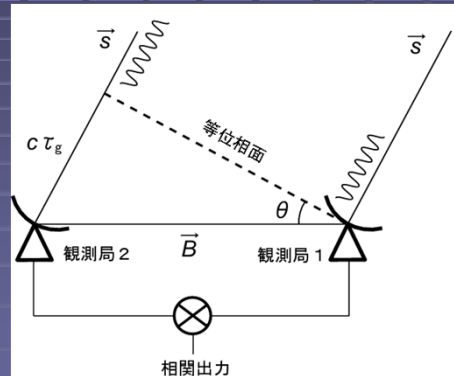
前回の復習

干渉計の基本方程式

- 干渉計の基本的な観測量：
幾何学的遅延時間 τ_g

$$\tau_g = \frac{\vec{s} \cdot \vec{B}}{c}$$

- s : 天体の方向ベクトル
- B : 基線ベクトル
- c : 光速



電波干渉計の模式図

※ここでは、簡単のため天体は点源としている

電波干渉計 I

VLA (25m x 27台、
最長基線~30 km)

米国 ニューメキシコ州



映画「コンタクト」
(1997年)

4ヶ月に1回程度アレイ
配列(干渉計の広がり)
を変更する。
→ 分解能が変えられる



VLAの中心部



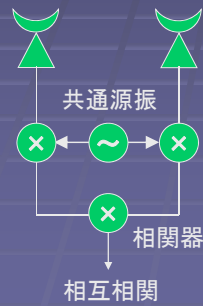
移動台車

結合素子型干渉計とVLBI

- 両者は原理的に同じだが、技術的には違いがある。

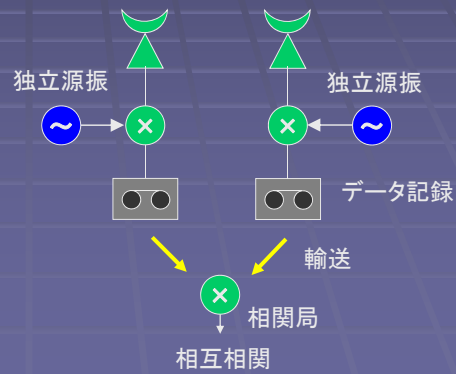
結合素子型:

すべてのアンテナはケーブルで接続されていて、原振も共通。



VLBI:

アンテナ間は接続されていない。原振は独立で、データは記録して相関局へ輸送。



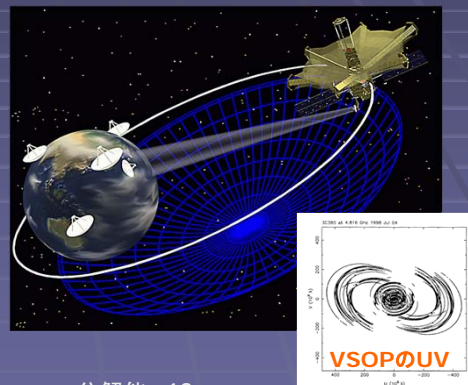
VLBI観測網 2

VERA
20m x 4台



分解能 1 mas
波長1 cm, D = 2300 km

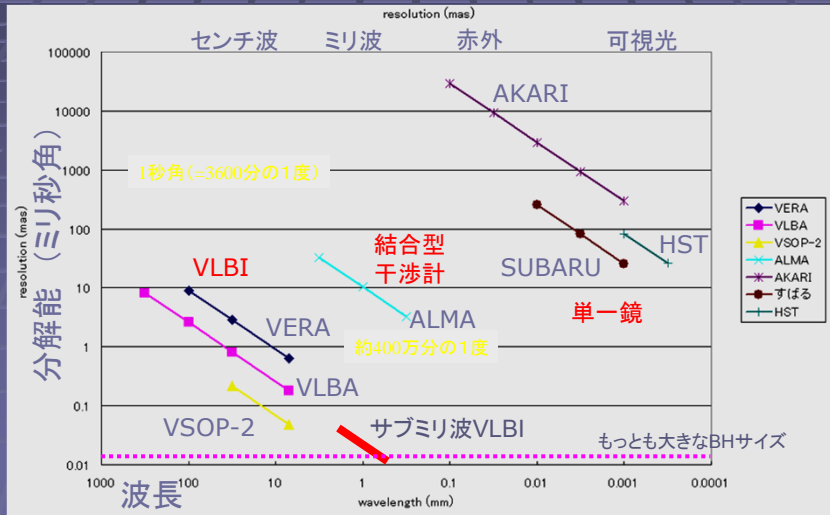
VSOP-2 (VLBI用アンテナを積んだ衛星, 2012年打上予定)



分解能 40 μ as
波長7 mm, D = 30000 km

VLBIの分解能

■ 様々な望遠鏡の分解能の比較



黒体放射(黒体輻射)

黒体放射

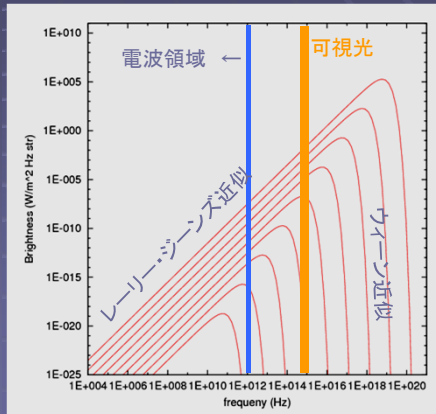
- 黒体(すべての周波数の電磁波を吸収し、再放射する仮想的物体)から出る放射

黒体放射の例：溶鋳炉からの光



八幡製鉄所

黒体放射の研究は、19世紀末に溶鋳炉の温度計測方法として発展



B_νのプロット (10⁰ ~ 10⁸ K)

プランクの放射公式

- 黒体の輝度を表す式

$$B_{\nu}(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}$$

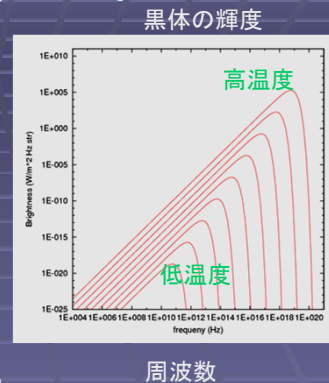
ν: 周波数、T: 黒体の温度

c: 光速 $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

h: プランク定数 $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J s}$

k: ボルツマン定数 $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J / K}$

B_νの単位例: W / m² Hz str (単位立体角strあたりのフラックス)



黒体の輝度

周波数

プランクの放射公式(続)

- 波長を用いた式もある
(本質的には $B_\nu(T)$ と同じもの)

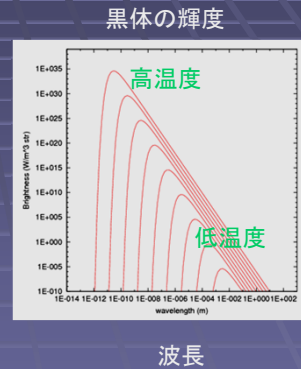
$$B_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/\lambda kT) - 1},$$

λ : 波長、 T : 黒体の温度

c : 光速 $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

h : プランク定数 $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J s}$

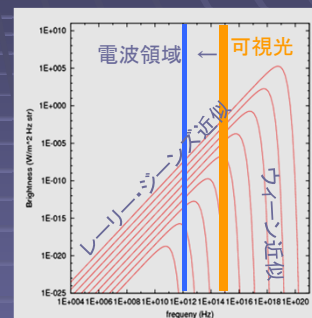
k : ボルツマン定数 $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J / K}$



2つの重要な近似式(1)

- ヴィーンの法則
 $h\nu \gg kT$ の場合の近似式
(高周波数側)

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT)}$$



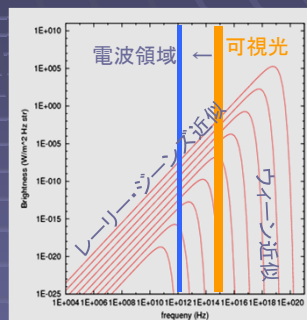
ヴィーン(W. Wien)により1896年に発見

2つの重要な近似式(2)

- レイリー・ジーンズの法則
 $h\nu \ll kT$ の場合の近似式
(低周波数側)

$$B_\nu(T) = \frac{2k\nu^2}{c^2} T$$

電波天文学では重要な近似



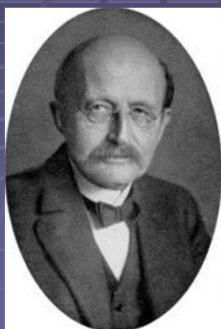
B_ν のプロット (1 ~ 10⁸ K)

レイリーにより1900年に発見。

その後、プランクによって、2つの近似式を同時に説明する式としてプランクの放射式が得られた。

黒体輻射と量子力学

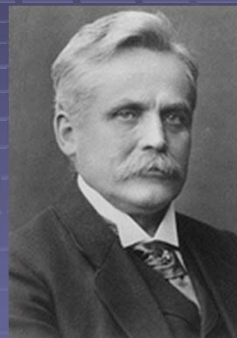
- 黒体の研究は、プランクの量子論につながり、量子力学の誕生に大きく貢献



マックス・プランク (独)
1918年ノーベル賞



レイリー卿 (英)
1904年ノーベル賞



ヴィルヘルム・ヴィーン (独)
1911年ノーベル賞

プランク放射の極大値

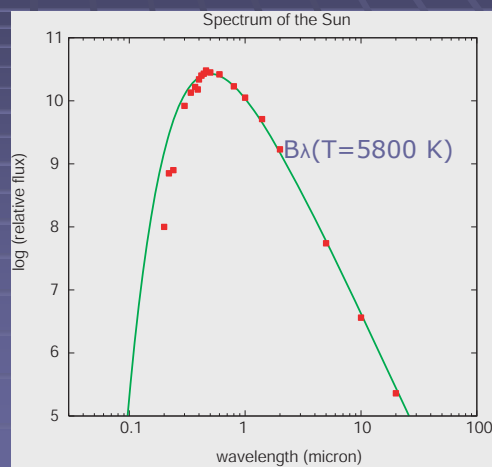
- プランクの放射公式で
$$dB_\nu/d\nu = 0, dB_\lambda/d\lambda = 0$$

の条件から、極大値が求まる(計算略)
- 周波数のピーク
$$\nu_{\max} = 2.82 kT / h = 59 \times (T \text{ in K}) \text{ GHz}$$
- 波長のピーク (ヴィーンの変位則)
$$\lambda_{\max} = 2.9 \times 10^{-3} \text{ m} \times (T \text{ in K})^{-1} \text{ m}$$

T in K は絶対温度(K:ケルビン)で表した温度の値。摂氏0度=273 K

太陽

- 太陽の光球
温度~5800度の黒体に近い
- $\lambda_{\max} = 0.5 \mu\text{m}$
→人間の目が可視光線
(~0.5 μm)に感度を持つ
のは放射強度のピーク
だから。



シュテファン・ボルツマンの法則

- 黒体の単位表面積から単位時間に出る放射の総量 I は黒体の温度の4乗に比例する。

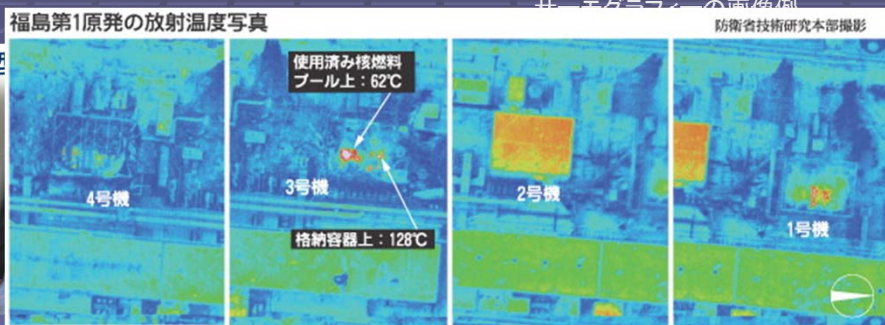
$$I = \iint B_\nu \cos \theta \, d\nu \, d\Omega = \sigma T^4,$$
$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$$

σ : シュテファン・ボルツマン定数

サーモグラフィ

放射温度計: 黒体輻射の性質を温度計に応用
例) 人体も $T \sim 310 \text{ K}$ の黒体に近い放射を出す。

→ 赤外線がピーク ($\lambda_{\text{max}} = 9 \mu\text{m}$)



人体からの放射エネルギー

- シュテファン・ボルツマン則から、人間から放射されるエネルギーも概算することができる。
- 体温を $T = 310 \text{ K}$,
人体の表面積を $S \sim 1.5 \text{ m}^2$ とすると、
 $P = I \times S = \sigma T^4 S \sim 800 \text{ W}$

何もせずにじっとしていてもこれだけのエネルギーを放射する(ただしその多くは外部から吸収されたエネルギー)

比較) 一日の放射エネルギー総量

$$E \sim 800 \text{ W} \times 86400 \text{ sec} \sim 70 \text{ MJ} \sim 17000 \text{ kcal}$$

> 一日に摂取すべき食物エネルギー $\sim 2000 \text{ kcal}$

太陽の全光度

- シュテファン・ボルツマンの法則から太陽の全光度を求めることができる。

$$L = 4\pi R^2 \times I = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

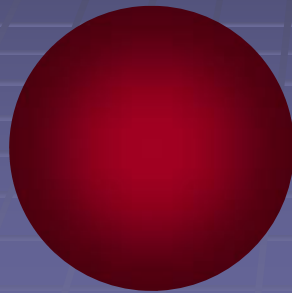
$$= 3.9 \times 10^{26} \text{ W}$$

比較) 原発1基の出力 $10^6 \text{ kW} = 10^9 \text{ W}$

太陽は原発 40京台分(!)のエネルギーを出す。

地球ももし完全な黒体だったら

- 地球の温度 $\sim 300\text{ K}$
 \rightarrow 赤外線($\sim 10\mu\text{m}$)にピークを持つ赤黒い天体に見えるはず



地球が黒体だった場合の想像図



実際の地球は、太陽光を反射して明るく輝いてみえている(反射率 ~ 0.3)

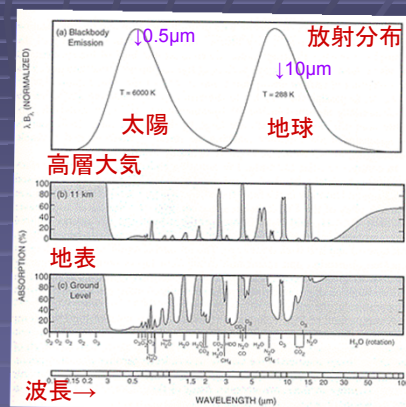
温室効果

- 太陽光のピーク波長
 $\lambda_{\text{sun}} \sim 0.5\ \mu\text{m}$
- 地球放射のピーク波長
 $\lambda_{\text{earth}} \sim 10\ \mu\text{m}$

CO_2 などの温室効果ガスは
 $10\mu\text{m}$ 付近の赤外線を良く吸収。
 このために「温室効果」が起きる

大気組成: N_2 78%, O_2 21%, アルゴン 0.9%,
 CO_2 0.04% + 水蒸気(\sim 数%)

このうち N_2 , O_2 は等核分子、アルゴンは希ガスで
 放射・吸収を起しにくい



波長による大気の吸収率
 Salby "Fundamentals of
 Atmospheric Physics"

黒体輻射関連公式

- 黒体輻射の単位体積当たりのエネルギー

$$\varepsilon_\nu = 4\pi/c \times B_\nu$$

単位体積に含まれるエネルギーを速度 c で光子が等方的に運び出すため。

- 輻射の全エネルギー密度 ($\varepsilon = \int \varepsilon_\nu d\nu$)

$$\varepsilon = 4\sigma T^4 / c \quad (=a T^4)$$

- 輻射の圧力 (光子の運動量 $p = E/c$)

$$P = \varepsilon / 3 \quad (= (a/3)T^4)$$

まとめ

黒体輻射の輝度

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (1)$$

単位面積あたりの放射強度 (シュテファン・ボルツマン則)

$$I = \iint B_\nu \cos \theta \, d\nu d\Omega = \pi \int B_\nu d\nu = \sigma T^4 \quad (2)$$

単位周波数あたりのエネルギー密度

$$\varepsilon_\nu = \frac{4\pi}{c} B_\nu \quad (3)$$

エネルギー密度

$$\varepsilon = \int \varepsilon_\nu d\nu = \frac{4\pi}{c} \int B_\nu d\nu = \frac{4\sigma}{c} T^4 \quad (4)$$

輻射の圧力 (参考: 光子の運動量 $p = E/c$)

$$P = \frac{2}{c} \iint B_\nu \cos^2 \theta \, d\nu d\Omega = \frac{4\pi}{3c} \int B_\nu d\nu = \frac{\varepsilon}{3} \quad (5)$$

すべて温度で決まる

宇宙背景放射 と ビッグバン宇宙

ビッグバン宇宙論

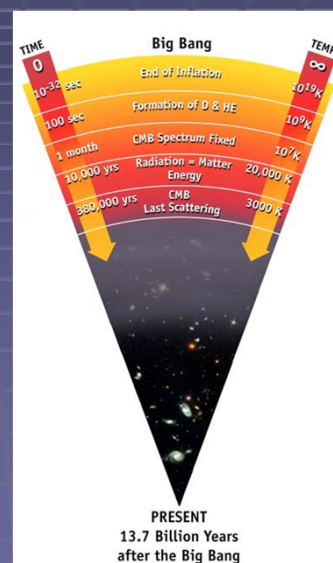
- 宇宙は高温・高密度状態から始まり、膨張して現在の宇宙になったとする説
(対立説: 定常宇宙論、宇宙は永劫普遍)
- ビッグバンとは宇宙誕生の大爆発を指すが、一方で当時は常識的にありえないと考えられたことから、「(爆発して)すぐにだめになる説」との皮肉もこめられていた。
- が、現代の宇宙観の根幹を成す理論であり、観測的にも確かめられている。

ビッグバン宇宙論の三大証拠

- 宇宙膨張(ハッブルの法則, 1929年)
遠い銀河ほど大きな後退速度を持つ
- 元素合成(1948年)
宇宙における元素組成(水素~75%, ヘリウム~25%)
は宇宙初期の高温状態から説明可能
- 宇宙背景放射(1965年)
宇宙が昔高温、高密度であったことの痕跡

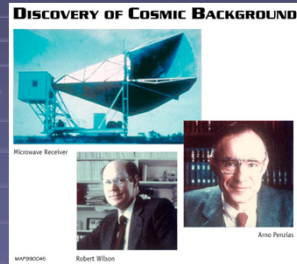
ビッグバンと宇宙背景放射

- ビッグバン宇宙
宇宙は高温・高密度状態から始まり、膨張して現在の宇宙になったとする説
- 昔は高温高圧の火の玉だったならば、宇宙がプラズマで満たされ不透明だった時代の痕跡が現在も見えるはず
→宇宙背景放射
(宇宙を一様に満たす黒体輻射)



宇宙背景放射の発見

- 宇宙背景放射の発見 (1965年)
ペンジャース、ウィルソン



宇宙の温度は絶対温度3度 (マイナス270度)

The Nobel Prize in Physics 1978

"for his basic inventions and discoveries in the area of low-temperature physics"

"for their discovery of cosmic microwave background radiation"

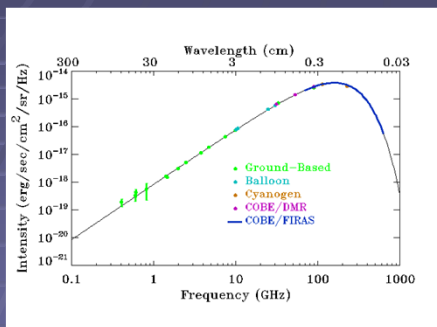
Pyotr Leonidovich Kapitsa
1/2 of the prize USSR
Academy of Sciences Moscow, USSR
b. 1894 d. 1984

Arno Allan Penzias
1/4 of the prize USA
Bell Laboratories Holmdel, NJ, USA
b. 1933 (in Munch, Germany)

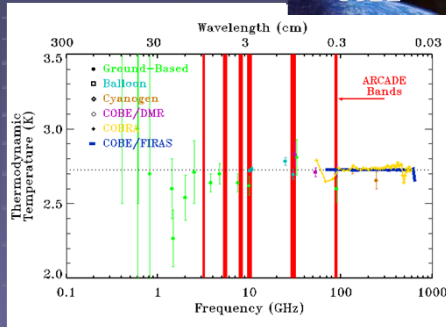
Robert Woodrow Wilson
1/4 of the prize USA
Bell Laboratories Holmdel, NJ, USA
b. 1936

宇宙背景放射のスペクトル

- 宇宙背景放射の輝度と温度



背景放射のスペクトル
黒体輻射に良く一致する



輝度温度
(何Kの黒体に
相当するかを表す)

アインシュタイン方程式

- アインシュタイン方程式(一般相対性理論, 1915年)
時空の構造(左辺)と物質(右辺)の関係式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}.$$

$R, R_{\mu\nu}$ は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ によって決まる量
(含む微分)

$T_{\mu\nu}$ はエネルギー-運動量テンソル

Λ は任意の定数(アインシュタインの宇宙定数)

- 上式から時間、空間に対する微分方程式が得られる。
(テンソルは4x4、ただし対称性より式は最大10本)

ロバートソン・ウォーカー時空

- 計量 $g_{\mu\nu}$: 時空の構造を表す量
- ロバートソン・ウォーカー計量
一様等方宇宙を表す計量

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right].$$

- $a(t)$ はスケール因子。時間変動する。
現在($t=t_0$)において $a(t_0)=1$
- K は宇宙の曲率(ユークリッド空間からのずれ)

フリードマン方程式

- アインシュタイン方程式とロバートソン・ウォーカー計量から以下の関係式が得られる(1922年)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{Kc^2}{a^2}$$

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3P) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

ε はエネルギー密度(ρc^2), P は圧力(共に時間の関数)

スケール因子の時間微分を含む微分方程式であり、特殊な解を除いて宇宙は変動(膨張or縮小)することがわかる。

エネルギー密度、圧力、温度

- 2本の方程式から2回微分項を消去すると

$$\frac{d\varepsilon}{da} = -\frac{3}{a}(\varepsilon + P)$$

という関係式を得る。

- 通常の場合 $P=0$ とみなせ、 $\varepsilon(=\rho c^2) \propto a^{-3}$
- 光子など相対論的な物質(光速度で運動)の場合、 $P=\varepsilon/3$ より、 $\varepsilon \propto a^{-4}$
- 輻射(光子)については $\varepsilon \propto T^4$ の関係より、

$$T = \frac{T_0}{a}, \quad (T_0=2.7\text{Kは現在の輻射温度})$$